BEITRÄGE ZUR THEORIE DER

LINEAREN UNGLEICHUNGEN

VON

Th. MOTZKIN

JERUSALEM

Basel
1936

Beiträge zur

Theorie der linearen Ungleichungen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung
der Philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Theodor Motzkin,

Jerusalem.

Jerusalem / 1936

Buchdruckerei Azriel

דפוס עזריאל ירושלים

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. Ostrowski und Dr. O. Spiess.

Basel, den 19. Dezember 1933.

Prof. Dr. *M. Reinhardt,*
Dekan.

R UNIV
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

PROFESSOR SOPHIE GETZOWA

GEWIDMET

EINLEITUNG.

§ 1. Überblick.

1. *Ausgangspunkt.* Beim Zeichenregelsatz von Descartes und seinen Verallgemeinerungen, mit denen sich neben vielen anderen vor allem Laguerre beschäftigt hat, spielt bekanntlich die Zahl der Zeichenwechsel einer Folge von Zahlen die Hauptrolle. Fekete und nach ihm Pólya hatten als erste den wichtigen Gedanken, allgemein zu untersuchen, wie die Zahl der Zeichenwechsel sich ändert, wenn die — wie stets im folgenden, endlich vielen — Zahlen der Folge als Variable angesehen und einer linearen Transformation unterzogen werden.

Als zentral erwies sich das Problem der Aufstellung all derjenigen linearen Transformationen, die die Zahl der Zeichenwechsel nie vermehren. Die Matrizen solcher Transformationen werden als variationsvermindernd bezeichnet.

Schönberg löste 1930 dieses Problem für den Fall, dass der Rang der Koeffizientenmatrix der Transformation gleich der Zahl der unabhängigen Veränderlichen ist. Er führt dazu den Begriff der minorendefiniten Matrix ein. Mit Hilfe einer — im Wesen der Sache liegenden — Verschärfung dieses Begriffs löse ich das Problem für den allgemeinen Fall. Dabei — wie auch bei Schönberg — genügt es zur Entscheidung, die Vorzeichen aller Minoren der Koeffizientenmatrix zu kennen.

2. *Zentrale Fragestellung.* Der tiefere Grund dieser Tatsache liegt darin, dass die Kenntnis dieser Vorzeichen auch für die Beantwortung einer viel allgemeineren Frage ausreicht: nämlich für die Ableitung expliziter Bedingungen für die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit eines Systems linearer Ungleichungen. Wir versuchen in §§ 3-12 eine allgemeine Theorie solcher Systeme und ihrer Lösungen zu entwickeln und behandeln dann in §§ 13 und 14 unabhängig davon die variationsvermindernden Matrizen.

Als erster hat sich meines Wissens Fourier systematisch mit Ungleichungen befasst; danach wandten ihnen, unabhängig von ihm und voneinander, nur Gordan und Minkowski ihr Augenmerk zu, und in diesem Jahrhundert sind gegen dreissig Abhandlungen über diesen Gegenstand erschienen, die in den

bibliographischen, unten folgenden Notizen aufgeführt sind. Ein kurzer, nicht ganz vollständiger Ueberblick über die geschichtliche Entwicklung findet sich in der Arbeit von Ruth Stokes. Umfangreichere bibliographische und historische Notizen geben Dines und Mc Coy in ihrer gemeinsamen Arbeit.

3. *Gang der Untersuchung.* Die Betrachtungen über Gleichungssysteme lassen sich teilen in explizite Darstellungen der Lösungen durch Determinanten (z. B. Cramer), die quantitative Theorie, und in die qualitative Theorie der Abhängigkeit, des Ranges usw. Entsprechend zerfallen unsere Untersuchungen in zwei Teile (§§ 5-10 und §§ 11-14).

Zuerst betrachten wir die homogenen Systeme, und zu diesem Zwecke definieren wir die sog. Basen (§ 5), beweisen ihre Existenz (§ 6), geben sie explizit an (§ 7) und betrachten sie näher (§ 8). So gewinnen wir eine parametrische Darstellung aller Lösungen, die wir für "feste" Systeme (§ 9) noch reduzieren können, worauf wir die inhomogenen Systeme ebenfalls aufzulösen im Stande sind (§ 10).

Sodann schreiten wir zu Äquivalenz- und Lösbarkeitsproblemen fort. Mit Hilfe einer Bestimmung des Ranges der "kleinsten Systeme" (§ 11) leiten wir Kriterien für Unauflösbarkeit (§ 12) ab, aus denen zwei Hauptsätze nebst Korollaren folgen: der Transpositions - (§ 13) und der Simplexsatz (§ 14).

Wir haben dabei im allgemeinen die analytischen Sätze parallel mit geometrischen Tatsachen dargestellt, als deren Formulierung sie angesehen werden können. Unsere Fragestellungen sind, der zugehörigen Gruppe nach, der affinen Geometrie zuzurechnen.

4. *Ergebnisse.* Bei dem vielfachen Ineinandergreifen aller Tatsachen in dem behandelten Gebiet wird es oft schwer fallen zu entscheiden, wo ein neuer Satz aus schon bekannten durch Kombination und wo er durch Synthese hervorgeht.

Ausser der Darstellung selbst, die, wie ich hoffe, neue Zusammenhänge erkennen lässt, möchte ich folgende zwei Punkte hervorheben, in denen ein Fortschritt zu verzeichnen ist.

Der Gedanke, Ungleichungssysteme für alle möglichen Vorzeichenbereiche (Zeichenkombinationen) simultan zu betrachten, dürfte in der vorliegenden Arbeit zum ersten Mal herangezogen werden. Der Nachweis einer Basis für diesen allgemeinsten Fall erspart daher viele besonderen Ueberlegungen.

Daneben ist das sog. Kombinationsprinzip ebenfalls nur aus dieser Betrachtungsweise heraus allgemein zu verstehen und zu formulieren. Aus diesem Prinzip ergeben sich Beweise des Transpositions- und des Simplexsatzes, die mit den bisherigen an Kürze mindestens gleichwertig sind, und der Transpositionssatz gewinnt zugleich eine besonders allgemeine Form.

5. *Zeichen und Termini.* Die Zahlen beziehen sich auf die Numerierung der Abschnitte, in denen der Begriffsname oder die Bezeichung zuerst verwendet wird.

abgeschlossen 21
absolute Glieder γ, c 27, 28
abwechselnd $\pm$ 70, 93
Alphabet (z. B. griech.) 15
Basis B 14, 17, 33, 45
benachbart 89, 90
Bereich 23, 26, 28, 31
definit $\geq \leq$ 15, 91
Determinante $|A|$ 16
Dimension n 19
Ebene 19
echt $><$ 15, 27
Ecke 30
Einheitsmatrix E_n 16
Einheitspunkt $1, 1_n, e_i$ 15
einpunktig 84
Element $\langle$ (lies: in) 14
erzeugen 14
Extremteil H 45
ganzseitig 20
geradenfrei 21
Gleichungsbasis G 17
Halbraum 27
Halbstrahl 20
Hauptorthant 26
homogen 27
Hülle 21
Hyperebene 20, 21, 84
Identität $\gtrless$ 27
inhomogen 27
Kästchen 16
kleinst 14, 82
Koeffizientenbereich $\mathbf{E}_1, \mathbf{W}$ 31
komplementär 19
konvex 20
k. u. S. 62
liegend 55
lineare Abhängigkeit k 55
Linearmenge 19
Lösungsbasis B 33
Lösungsbereich $\mathbf{L}$ 28
Lösungsmatrix L 33
Matrix 16, 34, 55
minorendefinit 92
modulo 52
Multiplikator M 17, 47, 56
nebeneinander (A, B) 16
normiert 50
Nullpunkt $0, 0_n$ 15
Orthant 26
orthogonal 49
Polyeder 20
polyedral 23
Projektion 22, 85
quadratisch A_{ii} 90
Rang r 16
Relation $\mathbf{P}$ 27
Signum sg 15, 71

Simplex	20	unauflösbar	62
Simplexkoordinaten	56	ungleich $\pm$	15
Simplexmatrix	55	unrund	28
Spaltenkombination A_i	16	untereinander $\binom{A}{B}$	16
Spaltenzahl m	16	variationsvermindernd	1, 88
stehend	55	Vorzeichenbereich $\mathbf{V}$	26
Strahlenbereich $\overline{x\mathbf{A}}$	23	" , eindimensionaler $\omega, \mathbf{E}, \mathbf{E}—,...$	25, 27
Stützhyperebene	21	x-Ecke	30
System Σ	28, 62	Zeilenkombination	16
Teilmatrix	16	Zeilenzahl n	16
Transformation	17	Zentralprojektion	85
transponiert A'	16	Zentralteil G	45
Trennhyperebene	76	Zentrum	23
unabhängig	14, 19		

6. *Verzeichnis der Sätze und Formeln.* Bedeutung der Zahlen wie in 5.

Sätze:

A1	17	C1	34	F1	22
A2	18	C2	38	F2	22
A3	88	C3	39	F3	24
A4	88	C4	44	F4	80
A5	89	C5	58	F5	81
A6	90			F6	83
		D1	68	F6	85
B1	70	D2	69	F8	85
B2	91	D3	71		
B3	92	D4	71	G1	74
B4	92	D5	72	G2	74
B5	93	D6	73,87	G3	75
B6	95	D7	80	G4	75,78
B7	96			G5	76,77
		E1	30		
		E2	50		
		E3	59		
		E4	65		

Formeln:

I	28	IV	42
I'	28	V	47
II	31	VI	50
II'	33	VII	58
III	35	VIII	73

§ 2. Zur Geschichte und Bibliographie [1]).

7. *Fourier.* Die Ursprünge des Interesses an linearen Ungleichungen als besonderem Thema der Forschung gehen auf Fourier zurück, dessen durchdringender Blick zuerst die hier schlummernden Möglichkeiten sah und der als erster an eine systematische Theorie der linearen Ungleichungen, ja der Ungleichungen überhaupt dachte.

Schon vor ihm war es unangenehm aufgefallen, dass in den Prinzipien der Mechanik unfreier Systeme letztere Ungleichungsbedingungen unterliegen, und Gauss hatte sie durch sein Prinzip des kleinsten Zwanges zu umgehen gesucht. Nun nehmen diese Bedingungen im Falle der Statik, z. B., wenn es sich um die Stabilität einer Lage handelt, einfachere und häufig lineare Formen an. Von hier aus war Fourier mit Notwendigkeit auf unseren Problemkreis gestossen, wie er stets versucht hat, die konkreten Verhältnisse mit den abstraktesten Mitteln anzugreifen. Er versprach sich zugleich von seiner Untersuchung Nutzen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Indessen ist Fourier nicht weit über die Aufwerfung des Problems hinaus gelangt. Seine Auflösungsmethode ist die naheliegende sukzessive (später Reduktion genannte) [2]), immerhin mit einer interessanten geometrischen Interpretation verbunden, die zum ersten Mal den Zusammenhang mit der Theorie der konvexen Polyeder aufdeckt. Die Ungleichungen mussten ihn dabei zur damals neuen Betrachtung von Halbräumen führen.

8. *Gordan und Minkowski.* Von solcher Anschaulichkeit war Gordan, der nach fünfzig Jahren durch invariantentheoretische Untersuchungen ziemlich nebenbei auf arithmetische Fragen verwandter Natur kam, weit entfernt.

Gordan sprach den eleganten Transpositionssatz in verbrämter Form aus und bewies ihn ziemlich umständlich, spezialisierte sich dann aber auf diophantische Probleme, die ihre eigene Literatur haben (bis auf van der Corput) und uns hier ferner liegen. —

---

[1]) Wir müssen in der folgenden historischen Übersicht bereits Bekanntschaft mit den im Textteil der Arbeit einzuführenden Begriffen (Verzeichnis s. Abschnitt 5) voraussetzen.

[2]) deren Abbrechen schon Fourier als einfachstes Lösbarkeitskriterium angibt.

Minkowski vereinte den geometrischen Standpunkt von Fourier mit dem *n*-dimensionalen von Gordan und behandelte die Frage nach der Auflösbarkeit von Ungleichungssystemen allgemeiner und erfolgreicher. Er entdeckte das vollständige System äusserster Lösungen (von dem aus wir zum Basis-Extremteil gelangen werden) für ein einzelnes vorgelegtes Ungleichungssystem und behandelte den inhomogenen Fall sowie die Frage nach der Abhängigkeit von Ungleichungen.

Auch führte er viele neuen, der geometrischen Anschauung entnommenen Begriffe ein: die wesentliche Stützebene, den Kappenkörper, den Polarkörper, die extremen Punkte, den Projektionsraum, die Flächenpunkte, die Eckstützebene (wir werden nicht aller dieser Begriffe bedürfen) und betonte die Wichtigkeit des Simplexsatzes.

9. *Farkas und andere.* Fourier, Gordan und Minkowski scheinen völlig unabhängig voneinander gearbeitet zu haben; auch weiterhin blieben die Resultate wenig bekannt und mussten mehrmals neu entdeckt werden, so von Stiemke und zum Teil von Farkas, Carver und dem Verfasser.

Farkas, der mit der Literatur vertraut war, griff unser Problem wieder von der Mechanik her mehrmals an und legte seine Resultate 1902 systematisch dar. Neben älteren Ergebnissen und neuen Ausdehnungen aufs Unendliche verdient vor allem die Frage nach den möglichen Abhängigkeiten von Relationen untereinander sowie die Aufstellung des allgemeinen Begriffs der Relation die gebührende Erwähnung. — Mit der Abhängigkeit von Relationen hat sich später neben Farkas auch Haar beschäftigt.

Steinitz stellte in seiner bekannten Arbeit über bedingt konvergente Reihen einige allgemeine Sätze über konvexe Körper und Strahlsysteme im mehrdimensionalen Raum auf, die mit unseren Betrachtungen zusammenhängen. Seitdem schliesst der Begriff konvex ausdrücklich weder abgeschlossen noch beschränkt ein. Betreffend den Begriff der Stützgeraden ist es vielleicht von Interesse zu bemerken, dass er bereits von Cramer (vgl. a. Newton und de Gua) unter dem Namen *déterminatrice* ständig benutzt wird. — Stiemke, der hier chronologisch folgt, ist bereits oben erwähnt.

10. *Die Amerikaner; Schlussbemerkung.* Ein spezielles Ungleichungssystem aus der politischen Arithmetik (nämlich aus der Theorie der Verhältniswahlen) hat Lovitt geometrisch gelöst.

Damit beginnt die Teilnahme der Amerikaner (Dines, Carver, Gummer), die sich insbesondere nach dem Kriege unseren Problemen zugewandt haben.

Diese Autoren haben interessante Einzelresultate und spezielle Lösungen gefunden, wie sie sich etwa bei Dines (1918) und Stokes finden. Zur Auflösung der Ungleichungssysteme verwendet Dines die Elimination, während Stokes und Kakeya ohne diese auskommen, Stokes übrigens mit einer zu der unsrigen genau dualen, vielleicht etwas unbequemen, geometrischen Interpretation.

Dines führt sein Verfahren auf eine Zahl, die er I-Rang nennt, die wir aber bei Seite lassen mussten, da sie im Gegensatz zu den Zeilenzahlen von C_1 und C_2 (Abschn. 52) und L_1, L_2 und L_3 (59) keine affine Invariante ist und ihr demnach nur eine zufällige Bedeutung zukommt.

Carver gibt Betrachtungen über Äquivalenz und verbotene Teilmatrizen, sowie über überflüssige Ungleichungen in auflösbaren oder unauflösbaren Systemen; auch leitet er die Beziehung $r=m-1$ (Satz D1) für ein kleinstes unauflösbares System ab.—

Alle diese Forscher haben einzelne Ungleichungssysteme manchmal sehr allgemeiner Art betrachtet; wir werden versuchen, den Zusammenhang zwischen ihren Resultaten so darzustellen, wie er sich aus den allgemeinen Sätzen der Theorie der Ungleichungssysteme mit variablem Vorzeichenbereich ergibt [1]).

11. *Verzeichnis der Arbeiten* zum Hauptteil der Abhandlung (in chronologischer Reihenfolge). Dabei bedeuten:

(1) Mathematische Annalen
(2) Mathem und naturwiss. Berichte aus Ungarn
(3) Journal für reine und angewandte Mathematik
(4) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
(5) Tôhoku Mathematical Journal
(6) American Mathematical Monthly
(7) Math. és termész. ért.
(8) Annals of Mathematics, 2. series
(9) Transactions of the American Mathematical Society
(10) Tôhoku Imperial Proceedings

---

[1]) Für feste Wahl des Vorzeichenbereiches hat Minkowski die erste vollständige Auflösungstheorie aufgestellt, sowohl für homogene als auch (entgegen einer irrtümlichen Behauptung von Stokes), wie oben angegeben, für inhomogene Systeme.

(11) Bulletin of the American Mathematical Society
(12) Transactions of the Royal Society of Canada III
(13) Math. és phys. lapok
(14) Mathematische Zeitschrift
(15) Proceedings of the Math. and Phys. Society of Japan, 2. Series
(16) Science Reports Tôhoku

1a	1676	Newton	Opuscula (1736)	31-199
1b	1740	de Gua	Usage de l'analyse de Descartes etc.	
1c	1750	Cramer	Analyse des Courbes Algébriques	
1d	1823	Fourier	Oeuvres II	317-328
1e	1829	Gauss	Werke V	23-28
1f	1834	Ostrogradsky	Mém. Ac. Sc. St.-Pétersbourg	
1g	1873	Gordan	(1)	6, 23-28
1h	1885	" - Kerschensteiner	Invariantentheorie, Lpz.	199
1i	1895	Farkas	(2)	12, 263-281
1j	(1898)	Farkas	(2)	15, 25-40
1k	1896	Minkowski	Geometrie der Zahlen, Lpz. 1910	39-45
1l	1897	Minkowski	Ges. Abh. II	103-122
1m	(1911)	Minkowski	Ges. Abh. II	131-320
1n	1899	Farkas	(2)	16, 154-157
1o	1902	Farkas	(3)	124, 1-27
1p	1911	Carathéodory	(4)	32, 139-217
1q	1913	Schmidt	(1)	74, 271-274
1r	1913	Steinitz	(3)	143, 128-175
1s	1914	Steinitz	(3)	144, 1-40
1t	1914	Farkas	A mechanika alaptanai, Kolozsvár	
1u	1915	Stiemke	(1)	76, 340-342
1v	1915	Kakeya	(5)	8, 218-221

Neuere Arbeiten:

2a	1916	Lovitt	(6)	23, 363-366
2b	1918	Haar	(7)	36, 279-296
2c	1918	Farkas	(7)	36, 297-308
2d	1918	Farkas	(7)	36, 396-408
2e	1918	Dines	(8)	20, 191-199
2f	1921	Carver	(8)	23, 212-220
2g	1924	Haar	Szeged Acta	2, 1-14
2h	1925	Dines	(8)	27, 57-64
2i	1926	Gummer	(6)	33, 488
2j	1926	Dines	(9)	29, 463-470
2k	1926	Dines	(8)	28, 41-42

2l	1927	Dines	(8)	28, 386-392
2m	1928	Fujiwara	(10)	4, 330-333
2n	1928	La Menza	Atti Congr. Int. Mat. Bologna II	199-209
2o	1930	Dines	(11)	36, 393-405
2p	1931	Van der Corput	Proc. Amst.	34, 368-371
2q	1931	Stokes	(9)	33, 782-805
2r	1931	Schlauch	(6)	39, 218-222
2s	1932	Schlauch	(9)	34, 594-619
2t	1932	Stoelinga	Diss. Amsterdam	
2u	1932	La Menza	Bol. Mat.	5, 127-130
2v	1933	La Menza	Bol. Mat.	5, 149-152
2w	1933	Dines-McCoy	(12)	27, 37-70
2x	1934	Bunt	Diss. Amsterdam	98-108
2y	1934	Weyl	Comm. Math. Helvetici	7, 290-306

12. *Literatur zu* §§ 15—16. Vorarbeiten:

3a	1637	Descartes	Geometrie Lpz. 1923	73
3b	1828	Gauss	Werke III	65-70
3c	1831	Fourier	Ostw. Klass. 127, Lpz.	92
3d	1834	Jacobi	Werke III	279
3e	1835	Sturm	Ostw. Klass. 143, Lpz. 1904	
3f	1879	Laguerre	Oeuvres I	67-71
3g	1881	Laguerre	Oeuvres I	151-152
3h	1883	Laguerre	Oeuvres I	3-47
3i	1884	Laguerre	Oeuvres I	181-206
3j	1899	Runge	Enz. d. math. Wiss., I, 1	409-416

Unmittelbar zum Thema:

4a	1912	Fekete	(7)	30, 746-782
4b	1912	Pólya	(7)	30, 783-796
4c	1912	Fekete-Pólya	(4)	34, 89-120
4d	1913	Bálint	(7)	31, 286-305
4e	1916	Bálint	(13)	25, 82-92
4f	1916	Bálint	(13)	25, 178-186
4g	1917	Bálint	(13)	26, 89-106
4h	1917	Curtiss	(8)	19, 251-278
4i	1925	Obreschkoff	Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver.	33, 52-64
4j	1925	Pólya-Szegö	Aufgaben aus der Analysis, Berlin Bd. 2, V	
4k	1930	Schoenberg	(14)	32, 321-328
4l	1934	Schoenberg	(14)	38, 546-564

13. *Weitere Literatur.* In der Arbeit zitierte oder berücksichtigte Bücher:

5a	Bonnesen-Fenchel	Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934
5b	Cesàro	Algebraische Analysis, Deutsche Übertragung von Kowalewski, 1. Aufl. Lpz. 1904
5c	Hausdorff	Grundzüge der Mengenlehre, Lpz. 1914
5d	Schreier-Sperner	Analytische Geometrie und Algebra I, 1931
5e	van der Waerden	Moderne Algebra I, Berlin 1930

Ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegen die Verallgemeinerungen aufs Unendliche, deren auffallend viele Sätze (so vor allem der Transpositionssatz) fähig sind. Man kann die Anzahl der Unbekannten oder der Relationen oder von beiden als abzählbar oder kontinuierlich annehmen, wodurch man interessante Sätze über Reihen bezw. Integrale erhält. Solche Sätze nebst ihren Anwendungen sowie verwandte Untersuchungen finden sich bei:

6a	1913	Kakeya	(5)	3, 137-150
6b	1913	Kakeya	(5)	4. 186-190
6c	1914	Kakeya	(5)	6, 27-31
6d	1914	Kakeya	(5)	6, 130-133
6e	1914	Kakeya	(5)	6, 187
6f	1914	Bohl	(3)	144, 284-313
6g	1915	Kakeya	(5)	8, 14-23
6h	1915	Kakeya	(15)	8, 83-102
6i	1915	Kakeya	(15)	8, 256-261
6j	1915	Kakeya	(15)	8, 408-420
6k	1915	Kakeya	(15)	9, 93-100
6l	1915	Fujiwara	(16)	4, 339-359
6m	1917	Fujiwara	(16)	6, 101-110
6n	1917	Fujiwara	(16)	6, 307-319
6o	1923	Hausdorff	(14)	16, 220-248
6p	1927	Dines	(11)	33, 659-700
6q	1927	Dines	(8)	28, 393-395
6r	1927	Dines	(9)	29, 463-470
6s	1928	Dines	(9)	30, 425-438
6t	1928	Dines	(9)	30, 439-446
6u	1929	Dines	(12)	23, 141-146
6v	1930	Dines	(11)	36, 393-405
6w	1930	McCoy	(11)	36, 878-882

6x	1930	Furtwängler	Monatsh. f. Math. u. Phys. (in einer Arbeit von Huber)	37,	59-60
6y	1930	Fujiwara	(10)	6,	297-
6z	1932	Ascoli	Ann. Mat. pura et appl. IV	10,	33-81
6a'	1932	Ascoli	Ann. Mat. pura et appl. IV	10,	203-232
6b'	1932	Schoenberg	(9)	34,	594-619
6c'	1932	Schoenberg	(11)	38,	72-76
6d'	1933	Schoenberg	(11)	39,	273-280
6e'	1933	Schoenberg	(9)	35,	452-478
6f'	1933	Hildebrandt-Schoenberg	(8)	34,	317-328

* * *

Auf der Grundlage einer 1930-32 in Jerusalem entstandenen, nicht im Druck erschienenen, ganz kurzen Arbeit (Teile der §§ 11, 15, 16) wurde die vorliegende Abhandlung in Basel unter der Leitung von Herrn Prof. Ostrowski ausgebaut.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Ostrowski, Basel, für seine energische Unterstützung besonders zu danken; erst seine wache und detaillierte Aufmerksamkeit, die mir stets zur Seite stand, liess diese Arbeit wachsen und Form gewinnen.

Ferner danke ich Herrn Prof. Fekete, Jerusalem, bestens für Bemerkungen bei der Durchsicht des ersten Entwurfs. Gern danke ich auch Herrn Dr. Chayoth, Jerusalem, herzlichst für mannigfaltigen Beistand, Herrn Dr. Markel, Tel Aviv, und Herrn Schiffer, Jerusalem, für Durchsicht der Korrekturen, sowie dem Verlag Azriel, Jerusalem, für seine Mühewaltung.

KAPITEL I. ALLGEMEINES.

§ 3. Einleitende Definitionen und Bemerkungen.

14. *Mengen.* Wir wollen allgemein eine Menge als eine kleinste Menge mit einer gewissen Eigenschaft bezeichnen, wenn keine ihrer echten Teilmengen, wohl aber noch sie selbst diese Eigenschaft hat; besonders nützlich ist dieser Begriff bei Anwendung auf Eigenschaften, die bei Hinzufügung beliebiger Elemente zu einer Menge erhalten bleiben.

Haben wir zu einer Menge $\mathfrak{A}$ eine kleinste Menge $\overline{\mathfrak{A}}$, die $\mathfrak{A}$ umfasst und eine gegebene Eigenschaft hat, so heisse $\overline{\mathfrak{A}}$ durch $\mathfrak{A}$ — in bezug auf die betreffende Eigenschaft — erzeugt, $\mathfrak{A}$ heisse erzeugende Menge. Jedes Element von $\overline{\mathfrak{A}}$ heisse von den Elementen von $\mathfrak{A}$ abhängig oder erzeugt durch $\mathfrak{A}$.

Eine kleinste erzeugende Menge einer gegebenen Menge $\mathfrak{C}$ heisse Basis von $\mathfrak{C}$. Ein Element einer Menge, das von den übrigen Elementen nicht erzeugt werden kann, heisse unabhängiges Element. Man mache sich diese Begriffe etwa an der Eigenschaft einer Menge klar, ein lineares Gebilde zu sein.

"x ist Element von $\mathfrak{A}$" schreiben wir $x \langle \mathfrak{A}$, lies: x in $\mathfrak{A}$.

15. *Punktmengen.* Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung von Mengen von Punkten des euklidischen n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, mit gegebenem rechtwinkligem cartesischem Koordinatensystem (des Zahlenraumes). Dabei werden wir die nachstehenden Bezeichnungen benutzen:

$\mathfrak{R}_n$ ist der ganze Raum. Beliebige Punktmengen erhalten im allgemeinen grosse fette, endliche Punktmengen grosse Kursiv-, reelle Zahlen griechische Buchstaben. Kleine Kursivbuchstaben sollen einzelne Punkte im $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen; diese Punkte werden wir auch häufig mit den Vektoren identifizieren, die vom Nullpunkt zu ihnen führen.

Der Nullpunkt selbst sei 0 oder 0_n. 1 oder 1_n sei der Einheitspunkt des $\mathfrak{R}_n$ (der Punkt, dessen sämtliche Koordinaten 1 sind). Der Einheitspunkt der i-ten Achse (der Vektor, der an i-ter Stelle eine Eins und sonst lauter Nullen hat) heisse e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ein Vektor x heisse ≥ 0, wenn jede seiner Koordinaten $\xi_\nu \geq 0$ ist, $\nu = 1, \ldots, n$; entsprechend definieren wir > 0, ≤ 0, < 0; dagegen soll $\neq 0$ die Negation von $= 0$ bedeuten.

Ist $x \geq 0$ oder $x \leq 0$, so heisse x definit. Für $x > 0$ und $x < 0$ schreiben wir auch $\operatorname{sg} x = +1$ bezw. $\operatorname{sg} x = -1$; x heisst echt definit.

16. *Matrizen.* Eine endliche Punktmenge A wollen wir auch als rechteckige Matrix auffassen, deren Spalten jeweils aus den Koordinaten eines Punktes a bestehen; umgekehrt kann man offenbar jede rechteckige Matrix mit n Zeilen und endlich vielen Spalten als eine endliche Menge von Punkten des $\mathbf{R}_n$ ansehen.

Durch Vertauschung von Zeilen mit Spalten erhalten wir aus einer Matrix A ihre Transponierte A'. Es bedeute AB das Matrizenprodukt von A und B, (A, B) bezw. $\binom{A}{B}$ die aus A und B durch Neben- bezw. Untereinanderschreiben entstehende Matrix. r wird im allgemeinen den Rang von A bezeichnen, n die Zahl der Zeilen und m die Zahl der Spalten. Insbesondere sei E_n die Einheitsmatrix der Ordnung n (in der Hauptdiagonale durchweg 1, sonst durchweg 0). Für quadratisches A sei $|A|$ der Wert der Determinante von A.

Wenn wir durch Fortlassung gewisser Zeilen und Spalten aus A Teilmatrizen (von anderen Kästchen genannt) bilden, so denken wir uns die Reihenfolge der stehengelassenen Zeilen und Spalten stets unverändert. Demgemäss ist insbesondere der Wert der Unterdeterminanten von A zu bestimmen. Jede Teilmatrix ist Durchschnitt einen Zeilenkombination mit einer Spaltenkombination.

Unter A_i wollen wir eine Teilmatrix der rechteckigen Matrix A verstehen, die den Rang i hat und aus i Spalten von A besteht. Es ist $1 \leq i \leq r$. Die Bezeichnung A_i ist jedoch hiermit nur für den Buchstaben A erklärt.

17. *Gleichungen.* Wir erinnern an einige Tatsachen aus der Theorie der linearen Gleichungen, die wir brauchen werden. Inhomogene Systeme sind genau dann lösbar, wenn die Matrix der Koeffizienten denselben Rang wie die Matrix aus den Koeffizienten und den absoluten Gliedern hat, und man erhält ihre Lösungen aus Quotienten von Unterdeterminanten.

Die Lösungen eines homogenen Systems $xA = 0$ vom Range r mit $n > r$ Unbekannten lassen sich aus $n-r$ unter ihnen linear und homogen zusammensetzen. Eine Matrix aus $n-r$ solchen Lösungen, die ihre Zeilen bilden, bezeichnen wir als eine (Gleichungs)-Basis G oder G_A. Ist M eine variable quadratische Matrix der Ordnung $n-r$, deren Determinante nicht verschwindet, so stellt MG jedes andere G_A dar (Transformation der Basis).

Jedes A_i, $i < r$, entspricht einem Teilsystem des ganzen Gleichungssystemes. Sei G_1 ein G von A und G_2 ein G von A_i. Die Zeilen von G_1 sind Lösungen des ganzen A - und daher erst recht des A_i - Systems, bilden jedoch kein vollständiges Lösungssystem, da ihre Anzahl um $r-i$ zu klein ist. Die fehlenden $r-i$ Lösungen kann man dem G_2 entnehmen, als irgendwelche $r-i$ von G_1 und voneinander unabhängige Zeilen. Wir haben also den häufig anzuwendenden

Satz A 1 [1]. Jedes G_A lässt sich durch Hinzufügung von $r-i$ Zeilen, die einem gegebenen G_{Ai} zu entnehmen sind, zu einem G dieses A_i erweitern.

18. *Auflösung durch Determinanten.* Ein G_A kann man übrigens (s. etwa Cesàro, Algebraische Analysis, S. 47) folgendermassen erhalten.

Ein festes A_r enthält $\binom{n}{r+1}$ aus r Spalten und $r+1$ Zeilen gebildete Teilmatrizen $A_{r,r+1}$. Fassen wir nun ein solches $A_{r,r+1}$ ins Auge. — Jeder seiner Zeilen können wir den Wert der von den übrigen Zeilen gebildeten Determinante r-ter Ordnung zuordnen; dabei multiplizieren wir diese $r+1$ Determinanten noch abwechselnd mit 1 und —1. Den übrigen $n-r-1$ Zeilen von A_r ordnen wir eine 0 zu und erhalten so mittels jedes $A_{r,r+1}$ n Zahlen, die den A_r-Zeilen (d. h. den A-Zeilen) zugeordnet sind; diese n Zahlen fassen wir, indem wir sie in unveränderter Reihenfolge nebeneinander stellen, zu einer Zeile zusammen. — Im ganzen erhalten wir so $\binom{n}{r+1}$ Zeilen, unter denen es stets wenigstens $n-r$ unabhängige gibt; irgend welche $n-r$ unabhängige Zeilen der so erhaltenen Matrix bilden ein G_A. Demnach gilt:

Satz A 2. Es lässt sich aus Unterdeterminantn r-ter Ordnung von A und Nullen ein G_A bilden.

19. *Linearmengen.* Die Sätze aus der Theorie der linearen Mengen (Gebilde, Räume, Mannigfaltigkeiten) setzen wir als bekannt voraus und erwähnen sie nur kurz.

Das von m unabhängigen Punkten erzeugte ("von m Vektoren aufgespannte") lineare Gebilde durch den Nullpunkt 0_n heisst von m-ter Dimension, ebenso jedes parallele Gebilde.

---

[1]) "Steinitzscher Austauschsatz"; s. z. B. Schreier-Sperner, Analytische Geometrie, sowie van der Waerden, Moderne Algebra, S. 96.

Zwei lineare Gebilde von m_1-ter bezw. m_2-ter Dimension, deren Durchschnitt vorhanden ist und die Dimension d hat, erzeugen zusammen ein Gebilde von (m_1+m_2-d) - ter Dimension (man nehme d Punkte aus dem Durchschnitt, m_1-d aus dem ersten und m_2-d aus dem zweiten Gebilde zur Erzeugung). Ist $m_1+m_2=n$ und $d=0$, so heissen die beiden Gebilde (in Bezug auf den $\mathbf{R}_n$) komplementär.

Hyperebene bedeute ein lineares Gebilde $(n-1)$-ter, Ebene stets ein solches von zweiter Dimension.

Jede lineare Gleichung $xa=0$ mit $a \neq 0$ stellt eine Hyperebene dar, die auf dem Vektor a senkrecht steht. Allgemeiner: ein Gleichungssystem $xA=0$ wird durch die Punkte eines linearen Gebildes gelöst, das zum durch A erzeugten linearen Gebilde komplementär ist und auf ihm im Nullpunkt senkrecht steht. Satz A 1 lässt sich dahin interpretieren, dass von diesen beiden Gebilden sich das eine vergrössert, wenn sich das andere verkleinert.

Endlich viele lineare Gebilde heissen linear unabhängig, wenn keines von ihnen in dem durch die übrigen zusammen erzeugten linearen Gebilde liegt.

§ 4. Konvexe Mengen.

20. *Definitionen.* Wie wir sehen werden, entsprechen den linearen Ungleichungssystemen die konvexen Mengen im selben Sinne, in dem die linearen Gebilde zu den Gleichungssystemen gehören; und zwar soll eine Menge konvex heissen, wenn sie mit je zwei Punkten x und y die ganze sie verbindende Strecke $\lambda x + (1-\lambda) y$, $0 \leq \lambda \leq 1$, enthält. Die allgemeinsten konvexen Mengen gehören allerdings zu unendlichen Ungleichungssystemen.

Eine konvexe Menge, die keine Gerade enthält, heisse geradenfrei.

Unter einem konvexen Polyeder (Polytop) verstehen wir ein von endlich vielen Punkten x_i erzeugbares konvexes Gebilde, d. h., die Menge aller $\Sigma \lambda_i x_i$ mit $\Sigma \lambda_i = 1$. Insbesondere bestimmen $n+1$ linear unabhängige Punkte ein Simplex (verallgemeinerung des Dreiecks im $\mathbf{R}_2$ und des Tetraeders im $\mathbf{R}_3$).

Im $\mathbf{R}_1$ entartet der Begriff des Polyeders in den der Strecke oder eines einzelnen Punktes. Ausserdem gibt es im $\mathbf{R}_1$ als konvexe Mengen nur noch den ganzen $\mathbf{R}_1$ und den Halbstrahl.

Halbstrahl und Strecke können auch offen sein, die Strecke auch halboffen. Hier sind also alle zusammenhängenden Mengen konvex, während sonst nur das Umgekehrte gilt.

21. *Der Rand.* Eine konvexe Menge braucht nicht abgeschlossen zu sein. Die abgeschlossene Hülle einer konvexen Menge ist immer konvex (wie sehr leicht zu sehen ist, obzwar ich es nirgends ausdrücklich erwähnt finde). Polyeder sind abgeschlossen, lineare Gebilde sind konvex und abgeschlossen.

Hat die abgeschlossene Hülle einer konvexen Menge **A** mit einer Hyperebene gemeinsame Punkte, liegt **A** aber im übrigen ganz auf einer Seite der Hyperebene, so heisse die Hyperebene, wie üblich, Stützhyperebene von **A**.

Eine konvexe Menge, die mit jedem ihrer Punkte x und jedem ihrer Randpunkte y die ganze Strecke von x bis y, höchstens mit Ausnahme des Punktes y, enthält, heisse ganzseitig (sie enthält jede offene Seite (=lineares Randstück) entweder ganz oder gar nicht). Zu den ganzseitigen Mengen gehören die abgeschlossenen und die eindimensionalen konvexen Mengen.

22. *Durchschnittsbildung.* Wir erinnern zunächst an die einfache Tatsache, dass die Eigenschaft, konvex zu sein, ebenso wie die, linear, beschränkt oder abgeschlossen zu sein, bei Durchschnittsbildung erhalten bleibt.

Seien nun beliebig viele ganzseitige Mengen **A** gegeben, deren Durchschnitt existieren möge und **D** heisse. Sei $\overline{\mathbf{A}}$ die abgeschlossene Hülle von **A**, und sei $\overline{\mathbf{D}}$ der Durchschnitt aller $\overline{\mathbf{A}}$. Ist dann x ein Punkt von $\overline{\mathbf{D}}$, y ein Punkt von $\overline{\mathbf{D}}$, so ist auch $x \langle \mathbf{A}$, $y \langle \overline{\mathbf{A}}$, für alle **A**. Wegen der Ganzseitigkeit von **A** liegt auch jeder Punkt der offenen Strecke von x bis y in jedem **A**, also auch in **D**. Daher ist $\overline{\mathbf{D}}$ die abgeschlossene Hülle von **D** und wir sehen:

Satz F 1. Der Durchschnitt ganzseitiger Mengen ist wieder ganzseitig.

Zugleich ergibt sich:

Satz F 2. Bei ganzseitigen Mengen sind Hüllen- und Durchschnittsbildung vertauschbar, falls ein Durchschnitt existiert.

Man sieht nun leicht, dass die Projektion einer ganzseitigen Menge auf ein lineares Gebilde selbst ganzseitig ist.

23. *Strahlenbereiche.* Wenn eine konvexe Menge **A** als Vereinigung von offenen Halbstrahlen mit festem Endpunkt a, sowie eventuell noch des Punktes a selbst aufgefasst werden kann, so heisse **A** ein Strahlenbereich (konvexer Kegel) mit dem Zentrum a. Mit x enthält **A** auch den Halbstrahl $\overline{ax}$, d. i. die Menge der $a+\lambda(x-a)$, $\lambda > 0$.

Ist $a = 0$, so enthält **A** mit x auch λx, $\lambda > 0$, und mit x und y auch $\frac{x+y}{2}$ (als konvexe Menge), also auch $2 \cdot \frac{x+y}{2} = x+y$. Folglich enthält dann **A** auch mit endlich vielen Punkten jede homogene lineare Verbindung derselben, deren Koeffizienten positiv sind, da sie ja eine Summe von Gliedern der Form $\lambda_i x_i$ ist. (Übrigens hätte diese Eigenschaft auch zur Definition der Strahlenbereiche mit dem Zentrum 0 dienen können, da aus ihr die Konvexität ohne weiteres folgt: $\lambda x+(1-\lambda)y$ ist eine spezielle lineare Verbindung.)

Die Halbstrahlen, die von einem gegebenen Punkt a zu allen Punkten einer konvexen Menge **A** führen, bilden den durch **A** (oder auch durch jede erzeugende Menge von **A**) erzeugten Strahlenbereich mit dem Zentrum a, wenn man noch a selbst genau dann hinzurechnet, falls a zu **A** gehört; wir bezeichnen ihn künftig stets mit $\overline{a\mathbf{A}}$. Dieser Bezeichnung subsumiert sich auch insbesondere der Halbstrahl $\overline{ax}$. — Im $\mathbf{R}_1$ kann $\overline{a\mathbf{A}}$ den ganzen $\mathbf{R}_1$, einen (offenen oder abgeschlossenen) Halbstrahl oder einen einzelnen Punkt bedeuten. — Ein sein Zentrum enthaltender, von endlich vielen Punkten erzeugter Strahlenbereich heisse polyedral.

24. *Ganzseitigkeit.* Sind mehrere ganzseitige konvexe Mengen $\mathbf{A}_i$, $i = 1,\ldots,m$ gegeben, sodass a der Hülle ihres Durchschnitts **A**, d. h. ihnen allen angehört oder einigen angehört und auf dem Rand der übrigen liegt, so werden wir leicht sehen, dass auch $\overline{a\mathbf{A}}$ der Durchschnitt der $\overline{a\mathbf{A}_i}$ ist, was im allgemeinen Falle (wenn a anderswo liegt) nicht zu gelten braucht.

Denn gehört ein Punkt p zu $a\mathbf{A}$, so gehört er erst recht zu allen $\overline{a\mathbf{A}_i}$; und umgekehrt, gehört p zu jedem $\overline{a\mathbf{A}_i}$, $i = 1,\ldots,m$, so liegt auf dem Halbstrahl $\overline{ap}$ je ein Punkt p_i von **A**, und derjenige unter den Punkten p_i, der am nächsten zu a liegt, muss auch (wegen der Ganzseitigkeit der Mengen $\mathbf{A}_i$) zu allen $\mathbf{A}_i$, d. h. zu **A** gehören, sodass $p < \overline{a\mathbf{A}}$ ist. Dabei war $p \neq a$ angenommen; für $p = a$ ist der Sachverhalt trivial. Wir haben also gezeigt:

Satz F 3. Bei endlich vielen ganzseitigen Mengen sind Strahlenbereich- und Durchschnittsbildung vertauschbar, wenn das Zentrum zur Hülle des Durchschnitts gehört.

Man überzeugt sich noch leicht, dass $\overline{a\mathfrak{A}}$ für $a \langle \mathfrak{A}$ und ganzseitiges $\mathfrak{A}$ nur von dem in einer beliebig kleinen Umgebung von a gelegenen Teil von $\mathfrak{A}$ abhängt.

25. *Die Zahlengerade.* Den eindimensionalen Raum $\mathfrak{R}_1$ werden wir auch mit $\mathfrak{E}_{-0+}$ bezeichnen, die Menge der positiven Zahlen mit $\mathfrak{E}_+$, die Menge der nichtpositiven Zahlen mit $\mathfrak{E}_{-0}$ usw. Wir haben sechs konvexe Mengen $\mathfrak{E}$, nämlich $\mathfrak{E}_{-0+}$, $\mathfrak{E}_{-0}$, $\mathfrak{E}_{0+}$, $\mathfrak{E}_-$, $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_0$ (die Null allein).

Dann ist offenbar das Produkt jeder dieser sechs Mengen mit einer festen Zahl wiederum mit einer von diesen Mengen identisch, ebenso ist die Summe zweier und daher endlichvieler von diesen sechs Mengen wiederum eine von diesen Mengen. Durchläuft also jede Veränderliche ξ_i einer Linearform $\Sigma\lambda_i \xi_i$ ein gegebenes $\mathfrak{E}_i$, so sehen wir, dass auch der Wertbereich der Form ein solches $\mathfrak{E}$ ist.

Die sechs $\mathfrak{E}$ sollen eindimensionale Vorzeichenbereiche heissen. Vier davon: $\mathfrak{E}_{-0+}$, $\mathfrak{E}_{-0}$, $\mathfrak{E}_{0+}$ und $\mathfrak{E}_0$ sind abgeschlossen.

26. *Vorzeichenbereiche.* Seien n solche eindimensionale Vorzeichenbereiche $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ gegeben. Dann heisse die Menge der Punkte des $\mathfrak{R}_n$, deren erste, ..., n-te Koordinate bezw. in $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ liegt, der n-dimensionale Vorzeichenbereich $\mathfrak{V}$, den wir ausführlicher mit $\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2 \cdots \mathfrak{E}_n$ bezeichnen. Jedes $\mathfrak{V}$ ist ein Strahlenbereich mit dem Zentrum 0_n, umfasst, wenn es abgeschlossen ist, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0 \cdots \mathfrak{E}_0$ (n Mal) $= 0_n$ und ist in $\mathfrak{E}_{-0+}$ (d. h. im Gesamtraum) enthalten.

Analog, wie der $\mathfrak{R}_2$ in Quadranten, der $\mathfrak{R}_3$ in Oktanten, zerfällt der $\mathfrak{R}_n$ durch die n Koordinatenhyperebenen in 2^n Teile, die wegen ihrer rechtwinkligen Ecke Orthanten heissen mögen. Es sind spezielle Vorzeichenbereiche, nämlich diejenigen, bei deren Bildung weder $\mathfrak{E}_0$ noch $\mathfrak{E}_{-0+}$ beteiligt ist. $\mathfrak{V}_{0+} = \mathfrak{E}_{0+}^n$ heisse der Hauptorthant. Er ist abgeschlossen, während der Orthant $\mathfrak{V}_+ = \mathfrak{E}_+^n$ sein Inneres darstellt.

KAPITEL II. DARSTELLUNG DER LÖSUNGEN.

§ 5. Ungleichungen.

27. *Relationen.* Im folgenden werden wir nur lineare Gleichungen und Ungleichungen betrachten und sie allgemein als Relationen zusammenfassen.

Eine einzelne Relation in endlich vielen — n — reellen Unbekannten schreiben wir in der Form

$P_{\alpha,\gamma,E}$: $\qquad x\alpha+\gamma=\omega,\ \omega \langle E$

oder einfach $x\alpha+\gamma \langle E$, wo ebenso wie später im gleichen Zusammenhang x eine Zeile aus n Unbekannten und α eine "Koeffizienten-Spalte" bedeutet [1]), γ eine feste Zahl (das absolute Glied) und E irgend einer der sechs eindimensionalen Vorzeichenbereiche ist.

E_0, E_{-0+}, E_-, E_+, E_{-0}, E_{0+} entsprechen bezw. dem Zeichen $=0, \gtrless 0, <0, >0, \leqq 0, \geqq 0$. Wir unterscheiden Gleichungen, Identitäten und Ungleichungen, und zwar heissen $\gtrless$-Relationen, sowie Relationen mit $\alpha = \gamma = 0$, da sie identisch (für jedes x) erfüllt sind, Identitäten, $>$- und $<$-Relationen heissen echte Ungleichungen. Relationen mit $\gamma = 0$ heissen homogen.

Während die einer Gleichung genügenden Punkte eine Hyperebene erfüllen, nehmen die Punkte, die eine der entsprechenden Ungleichungen befriedigen, einen von der Hyperebene begrenzten offenen oder abgeschlossenen Halbraum ein, und eine Identität repräsentiert den ganzen R_n. Alle diese Punktmengen sind ganzseitig.

28. *Systeme.* m solche Relationen P bilden ein endliches Relationensystem, das sich offenbar in der Form

I $\qquad \Sigma_{A,c,V}$: $\qquad xA + c \langle V$

schreiben lässt, wo A eine Koeffizientenmatrix und c eine Spalte aus "absoluten Gliedern" ist und der m-dimensionale Vorzeichenbereich V durch die gegebene Zeichenkombination eindeutig bestimmt ist. Jeder Spalte α von A entspricht eine Relation P aus Σ.

---

[1]) Diese Schreibweise wird sowohl durch die Auffassung des inneren Produktes als speziellen Matrizenproduktes nahegelegt, als auch durch den Gegensatz zwischen kogredienten Vektoren (Zeilen, Lösungen) und kontagredienten Vektoren (Spalten, Koeffizienten).— Legt man auf eine grössere Einheitlichkeit Wert, so liessen sich oft kogrediente Vektoren, die in den folgenden Auseinandersetzungen der Einfachheit halber gebraucht sind, durch Matrizen ersetzen.

Die Gesamtheit der Lösungen des Systems Σ — wenn es solche gibt — werden wir im folgenden den Lösungsbereich nennen und mit $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\Sigma)$ bezeichnen, so dass die allgemeinste Lösung von I die Form

I' $$x \langle \mathbf{L}$$

hat. Als Durchschnitt von Hyperebenen und Halbräumen ist auch $\mathbf{L}$ eine ganzseitige Menge und im Falle homogener Relationen ($c = 0$) ein Strahlenbereich mit dem Zentrum 0_n.

Jedoch können nicht sämtliche ganzseitigen Mengen bzw. Strahlenbereiche als $\mathbf{L}$ gewisser Σ erhalten werden; vielmehr trifft das nur für besondere Mengen zu, die wir, aus später ersichtlichen Gründen, als unrund bezeichnen wollen. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass der Durchschnitt endlich vieler unrunder Mengen selbst unrund ist.

29. *Bemerkungen.* Da I auch speziell $x \langle \mathbf{V}$ lauten kann, so folgt, dass auch $\mathbf{V}$ ganzseitig und unrund ist.

Gleichungssysteme lassen sich als Spezialfall mit $\mathbf{V} = \mathbf{E}_0^{\,m}$ auffassen; allgemeiner ist der Fall $\mathbf{E}^m$ von besonderem Interesse. Aus Systemen dieses letzteren Typs lassen sich alle übrigen durch einfache logische und arithmetische Operationen aufbauen.

Hinzufügung von Identitäten zu Σ bedeutet eine Erweiterung von A um gewisse Spalten, während $\mathbf{V}$ mit einem Produkt aus Faktoren der Form $\mathbf{E}_{-0+}$ oder $\mathbf{E}_0$ multipliziert wird. $\mathbf{L}$ kann sich dabei natürlich nicht ändern.

Wir bemerken noch, dass die Aufgabe, diejenigen x aus $\mathbf{L}$ zu finden, die in einem zweiten gegebenen Vorzeichenbereich $\mathbf{V}_1$ liegen, ihrer Natur nach nichts Neues bietet; man hat ja nur spezielle homogene Relationen für die x hinzugefügt, und das ganze System lässt sich nun — an Hand der in 16 eingeführten Bezeichnungen—in der Form

$$x\,(E, A) + \binom{0}{c} \langle \mathbf{V}_1\,\mathbf{V}$$

schreiben.

30. *Teilsysteme.* Jedem Punkt $x \langle \mathbf{R}_n$ können wir folgendermassen ein Teilsystem $\Sigma^{(x)}$ von Σ zuordnen: $\Sigma^{(x)}$ soll alle Gleichungen, von den Ungleichungen aber nur die enthalten, in denen x ein Gleichheitszeichen hervorruft (d. h. auf deren zugehöriger Hyperebene x liegt); dies Teilsystem $\Sigma^{(x)}$ werden wir auch die x-Ecke [1]) von Σ nennen.

[1]) vgl. den Minkowskischen "Projektionsraum".

Es sei $\overline{\mathbf{V}}$ der $\mathbf{V}$ entsprechende abgeschlossene Vorzeichenbereich, und $\overline{\mathbf{L}}$ die Menge der Lösungen des Systems

$\overline{\Sigma}$: $\qquad xA + c \langle \overline{\mathbf{V}}$.

Wir nehmen $\mathbf{L}$ als nicht leer an, so dass $\overline{\mathbf{L}}$ nach Satz F 1 die Hülle von $\mathbf{L}$ ist. Dann betrachten wir den durch $\mathbf{L}$ erzeugten Strahlenbereich $x\overline{\mathbf{L}}$ mit dem Zentrum x, wo x ein beliebiger Punkt von $\overline{\mathbf{L}}$ ist, und zwar zunächst im Falle einer einzelnen Relation P.

Ist $\mathbf{L}$ für P eine Hyperebene oder der ganze Raum, so ist augenscheinlich $x\mathbf{L} = \mathbf{L}$, ebenso, wenn $\mathbf{L}$ ein Halbraum und x ein Randpunkt von $\mathbf{L}$ ist; ist dagegen x ein innerer Punkt des Halbraums $\mathbf{L}$, so wird $\overline{x\mathbf{L}} = \mathbf{R}_n$. Beide Fälle lassen sich offenbar in der Formel $\overline{x\mathbf{L}}(\mathrm{P}) = \mathbf{L}(\mathrm{P}(x))$ zusammenfassen, wenn wir als Lösungsbereich eines leeren Systems den ganzen $\mathbf{R}_n$ ansehen wollen.

Nach Satz F 3 ist im allgemeinen Falle eines Systems Σ von mehreren Relationen $\overline{x\mathbf{L}(\Sigma)}$ der Durchschnitt aller m einzelnen $\overline{x\mathbf{L}(\mathrm{P})}$, wo die $\mathbf{L}(\mathrm{P})$ Hyperebenen, Halbräume oder der $\mathbf{R}_n$ sind. Infolgedessen erkennen wir, dass $\overline{x\mathbf{L}}$ für $x \langle \overline{\mathbf{L}}$ gerade die Menge $\mathbf{L}(\Sigma^{(x)})$ der Lösungen von $\Sigma^{(x)}$ ist:

Satz E 1. $\overline{x\mathbf{L}} = \mathbf{L}(\Sigma^{(x)})$ für $x \langle \overline{\mathbf{L}}$.

31. *Der Koeffizientenbereich einer Zeile.* Wir beschränken uns zunächst (bis § 9 einschliesslich) auf homogene Systeme, die wir uns in der Form

II $\qquad \Sigma_{A,0,\mathbf{V}}$: $\qquad xA \langle \mathbf{V}$

gegeben denken.

Sei l irgend ein Punkt des $\mathbf{R}_n$. Dann können wir sämtliche ihm proportionalen Punkte ωl bilden, wo also ω eine beliebige Zahl bedeutet, und uns fragen, für welche Werte von ω der Punkt ωl eine Lösung des Relationensystemes II ist, d. h. in $\mathbf{L}(\Sigma)$ liegt. Da $\mathbf{L}$ mit jedem Punkt auch alle seine positiven Vielfachen enthält, können nur sechs Fälle vorkommen: je nachdem, ob von l und $-l$ beide oder keines oder nur l oder nur $-l$ in $\mathbf{L}$ liegen, und ob $\mathbf{L}$ die Null enthält oder nicht, werden die gesuchten Werte von ω zusammen jedesmal einen anderen eindimensionalen Vorzeichenbereich $\mathbf{E}$ bilden; dieses $\mathbf{E}$ heisse der zu der Zeile l gehörige Koeffizientenbereich $\mathbf{E}_l$. Mit $\mathbf{V}$ ist auch $\mathbf{E}_l$ abgeschlossen.

32. *Der Koeffizientenbereich einer Matrix.* Haben wir nun irgendeine Matrix $\mathbf{L}$ von p Zeilen und n Spalten, deren Zeilen etwa $l_1,\ldots,l_p$ heissen mögen, so wird eine aus diesen Zeilen gebildete lineare Kombination $\Sigma\omega_i l_i$ jedenfalls dann in $\mathbf{L}$ liegen (im allgemeinen aber nicht nur dann), wenn jedes ω_i im betreffenden Koeffizientenbereich $\mathbf{E}_{l_i}$ liegt. Wir können, wenn wir die Zeile aus den ω_i mit $\mathfrak{w}$ und den p-dimensionalen Vorzeichenbereich $\mathbf{E}_{l_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{E}_{l_p}$ mit $\mathbf{W}$ bezeichnen, auch sagen, dass für $\mathfrak{w} < \mathbf{W}$ sicher $\mathfrak{w}L < \mathbf{L}$ ist. Mit $\mathbf{V}$ ist auch $\mathbf{W}$ abgeschlossen.

Es bedeute das symbolische Produkt $\mathbf{W}L$, wie stets in solchen Fällen, die Menge aller $\mathfrak{w}L$ mit $\mathfrak{w} < \mathbf{W}$. Dann ist also $\mathbf{W}L$ ein Teil von $\mathbf{L}$, und $\mathbf{W}$ ist zwar nicht notwendig die grösste Menge, ja nicht einmal der grösste Vorzeichenbereich mit dieser Eigenschaft; wohl aber gilt letzteres für abgeschlossenes $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$: denn dann gehören die $\omega_i l_i$ selbst zu $\mathbf{W}L$, da jetzt, für alle $k \mp i$, $\omega_k = 0$ gesetzt werden darf, so dass auch $\mathbf{E}_{l_i} l_i < L$ gilt, wo $\mathbf{E}_{l_i}$ der i-te Koordinatenbereich von $\mathbf{W}$ ist.

$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\Sigma, L)$ wird in vielen späteren Überlegungen eine ausgezeichnete Rolle spielen: wir nennen $\mathbf{W}$ den zu der Matrix L gehörigen Koeffizientenbereich. Der Koeffizientenbereich einer Matrix ist also das Produkt der zu den einzelnen Zeilen der Matrix gehörigen Koeffizientenbereiche.

Da $\mathbf{W}L$ — ebenso wie $\mathbf{W}$ — mit je zwei Punkten ihre Summe und mit jedem Punkt seine positiven Vielfachen enthält, ist $\mathbf{W}L$ ein Strahlenbereich mit dem Zentrum 0_n.

33. *Lösungsmatrizen.* $\mathbf{W}L$ stellt also lauter Lösungen dar, aber vielleicht nicht alle Lösungen; andererseits wäre es doch denkbar, dass gerade $\mathbf{W}L = \mathbf{L}$ ist, dass also jede Lösung x von II in der parametrischen Form

II' $$x = \mathfrak{w}L, \quad \mathfrak{w} < \mathbf{W}$$

darstellbar ist. Wenn das nun sogar für jedes in Frage kommende abgeschlossene $\mathbf{V}$, d. h. für jede Kombination der Relationszeichen (ausser $>$ und $<$) richtig bleibt, also $\mathbf{W}(\mathbf{V})L = L(\mathbf{V})$ identisch in $\mathbf{V}$ gilt, so nennen wir L eine Lösungsmatrix von A.

Ist L eine Lösungsmatrix, so behält sie diese Eigenschaft auch nach Hinzufügung beliebiger Zeilen. Denn man kann, um einen Punkt von $\mathbf{L}$ mit Hilfe der erweiterten Matrix darzustellen, ja sicher die alte Darstellung benutzen und die neuen Zeilen mit den Koeffizienten 0 versehen; eventuell ist man nicht einmal dazu gezwungen und erhält noch wesentlich verschiedene, neue Darstellungen.

Daher werden wir nach solchen L suchen, die keine überflüssigen Zeilen enthalten; sie mögen Basen von A heissen. Als eines unserer Hauptergebnisse zeigen wir nun im nächsten Paragraphen, dass es in der Tat zu jedem A eine Basis gibt (Satz C 2).—Eine Matrix L ist genau dann eine Lösungsmatrix von A, wenn sie eine Basis von A enthält.

Haben wir ein Relationensystem mit A_i, einem Teil der Spalten von A, als Koeffizientenmatrix, so können wir es als spezielles System mit A als Koeffizientenmatrix auffassen, indem wir es durch Identitäten ergänzen. Da also die A_i-Systeme ein Teil der A-Systeme sind, ist jede Lösungsmatrix L_A von A zugleich für jedes A_i eine Lösungsmatrix L_{A_i}. Diese Tatsache legt Induktion nach der Spaltenzahl von A nahe.

§ 6. Existenz von L.

34. A^*. Es bedeute in den nächsten Abschnitten A^* eine Matrix von n Zeilen und $n+1$ Spalten, deren erste n Spalten die Einheitsmatrix E_n bilden und deren letzte Spalte a aus n beliebigen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besteht: $A^* = (E_n, a)$.

Wir bilden nun für jede Kombination von h und k mit $1 \leq h < k \leq n$ einen Vektor l_{hk}, dessen h-te Koordinate α_k und dessen k-te Koordinate $-\alpha_h$ ist, während die übrigen $n-2$ Elemente Null sind: $l_{hk} = \alpha_k e_h - \alpha_h e_k$. Da $l_{hk} a = 0$ ist, und l_{hk} höchstens zwei nichtverschwindende Koordinaten hat, sind — was wir aber nicht weiter benutzen werden — die l_{hk} Punkte auf den Schnittgeraden der Hyperebene $xa = 0$ mit den $\binom{n}{2}$ zweidimensionalen Koordinatenebenen.

Diese $\binom{n}{2}$ Zeilen l_{hk} schreiben wir in bezüglich h und k lexikographischer Anordnung untereinander und erhalten so eine nur von a abhängige Matrix $L_1 = L_1(a)$. Fügen wir noch die n Zeilen e_i hinzu, so entsteht eine Matrix $L = \binom{L_1}{E_n}$ mit $\binom{n+1}{2}$ Zeilen. (Im trivialen Falle $n = 1$ wird $L = E_1$, L_1 fällt weg.) Wir wollen zeigen:

Satz C 1. L ist eine Lösungsmatrix von A.

Den Beweis dieser Behauptung erbringen wir in den Abschnitten 35-37.

35. *Beweis.* Sei nämlich x irgendeine Lösung des dem obigen A entsprechenden abgeschlossenen homogenen Relationensystems $xA \langle \mathbf{V}$, dann soll bewiesen werden, dass x die Form $\mathfrak{w}L$, $\mathfrak{w} \langle \mathbf{W}$ hat

x habe die Komponenten $\xi_1, \ldots, \xi_n$, so dass also $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ ist. Dann hat das uns vorliegende System bei unserem speziellen A ausführlicher die Form:

III Σ_{A^*}: $\xi_i \langle \mathbf{E}_i,\ i = 1, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \langle \mathbf{E}_{n+1}$

(die ersten n Relationen gehören zu den Spalten von E_n, die letzte zu der Spalte a).

Nun gehören neben x entweder alle Vektoren $\xi_i e_i$ zu $\mathbf{L}(\Sigma)$, oder nicht alle (eventuell kein einziger). Dies ergibt zwei Fälle, deren erster sofort und deren zweiter in den nächsten beiden Abschnitten behandelt wird.

Erster Fall: hier ist jedes $\xi_i e_i$ eine Lösung von $xA^* \langle \mathbf{V}$. Da e_i eine Zeile von L ist, und $\mathbf{W}L$ also nach 32 alle $\omega_i e_i$ umfasst, die in $\mathbf{L}$ liegen, so liegen in diesem Falle die $\xi_i e_i$ in $\mathbf{W}L$, daher liegt auch ihre Summe x in $\mathbf{W}L$.

36. *Zweiter Fall.* Möge nunmehr hingegen etwa $\xi_h e_h$ nicht zum Lösungsbereich $\mathbf{L}$ gehören. Setzen wir dann die Komponenten von $\xi_h e_h$ in das System III ein, so sehen wir, dass die ersten n Relationen sicher erfüllt sind (der Wert der Linearformen links in III bleibt der gleiche wie für x oder verschwindet). Daher ist die $(n+1)$-te Relation $\alpha_h \xi_h \langle \mathbf{E}_{n+1}$ sicher nicht erfüllt, woraus (da wir uns auf abgeschlossene $\mathbf{V}$ beschränkt haben) $\alpha_h \xi_h \neq 0$ folgt. Hätten nun auch alle übrigen von Null verschiedenen $\alpha_i \xi_i$ dasselbe Vorzeichen wie $\alpha_h \xi_h$, so könnte — gegen die Voraussetzung — auch ihre Summe ax nicht in $\mathbf{E}_{n+1}$ liegen. Also muss es mindestens ein $\alpha_k \xi_k$ von entgegengesetztem Vorzeichen wie $\alpha_h \xi_h$ geben, und wir denken uns ein solches ausgezeichnet.

Da demnach $\xi_h \alpha_h \xi_k \alpha_k < 0$ ist, so ist wegen $\xi_k \langle \mathbf{E}_k$ auch $-\frac{\xi_h \alpha_h}{\alpha_k} \langle \mathbf{E}_k$ und wegen $\xi_h \langle \mathbf{E}_h$ auch $-\frac{\xi_k \alpha_k}{\alpha_h} \langle \mathbf{E}_h$. Da $l_{hk} a = 0$ ist, sehen wir, dass

$$\frac{\xi_h}{\alpha_k} l_{hk} \text{ und } -\frac{\xi_k}{\alpha_h} l_{hk}$$

alle Relationen III erfüllen, also zu $\mathbf{L}$ gehören; da aber l_{hk} eine Zeile von L ist, so sind $\frac{\xi_k}{\alpha_k} l_{hk}$ und $-\frac{\xi_h}{\alpha_h} l_{hk}$ spezielle ωl und gehören zu $\mathbf{W}L$.

37. *Die Reduktion.* Setzen wir nun

$$x_1 = x - \frac{\xi_h}{\alpha_k} l_{hk},\ x_2 = x + \frac{\xi_k}{\alpha_h} l_{hk}$$

$$x = x_1 + \frac{\xi_h}{\alpha_k} l_{hk} = x_2 - \frac{\xi_k}{\alpha_h} l_{hk},$$

so unterscheidet sich x von x_1 und x_2 nur an der h-ten und k-ten Stelle; und zwar sind ξ_h und ξ_k, die beiden betreffenden Komponenten von x, wie wir oben sahen, $\neq 0$, während x_1 an der h-ten und x_2 an der k-ten Stelle eine Null hat.

Es ist, wegen $l_{hk}\ a = 0$, auch

$$x_1 a = x_2 a = xa \ \langle\ \mathbf{E}_{n+1},$$

sowie

$$x_1 e_i = x_2 e_i = xe_i \langle\ \mathbf{E}_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq h, k.$$

Weiter ist $x_1 e_h = x_2 e_k = 0$. x_1 genügt also sicher allen Relationen von Σ ausser der k-ten; diese besagt, dass die k-te Komponente von x_1, nämlich

$$\xi_k + \frac{\xi_h\, \alpha_k}{\alpha_k} \langle\ \mathbf{E}_k$$

liegen soll. Ebenso erhalten wir, als Bedingung für $x_2 \langle\ \mathbf{L}$, die Relation

$$\xi_h + \frac{\xi_k\, \alpha_k}{\alpha_h} \langle\ \mathbf{E}_h$$

Ist nun $|\xi_h \alpha_h| \leq |\xi_k \alpha_k|$, so folgt aus $|\xi_k| \geq \left|\frac{\xi_h\, \alpha_h}{\alpha_k}\right|$, dass $\xi_k + \frac{\xi_h\, \alpha_h}{\alpha_k}$ dasselbe Vorzeichen wie ξ_k hat oder Null ist, sodass, wegen

$$\xi_k \langle\ \mathbf{E}_k,\quad \xi_k \neq 0,\ 0 \langle\ \mathbf{E}_k,$$

jedenfalls $\xi_k + \frac{\xi_h\, \alpha_h}{\alpha_k} \langle\ \mathbf{E}_k$ und daher $x_1 \langle\ \mathbf{L}$ ist. Entsprechend leiten wir aus $|\xi_k \alpha_k| \leq |\xi_h \alpha_h|$ die Richtigkeit von $x_2 \langle\ \mathbf{L}$ ab.

Einer der beiden Punkte x_1 oder x_2 liegt also sicher in $\mathbf{L}$, und wenn wir ihn mit $\bar{x}$ bezeichnen, so haben wir x in zwei Bestandteile zerspalten, von denen der eine $x - \bar{x}$ wie wir oben sahen, schon in $\mathfrak{W}L$ liegt, während $\bar{x}$, der zweite Bestandteil, auch zu $\mathbf{L}$ gehört und mindestens eine Null mehr als x hat. Bei Wiederholung muss dieses Verfahren nach nicht mehr als $n - l$ Schritten abbrechen, und wir kommen schliesslich auf 0 oder den ersten Fall zurück.

Damit ist der Beweis vollständig erbracht, dass L eine Lösungsmatrix für jenes spezielle A^* ist.

38. *Allgemeines A.* Nunmehr beweisen wir den

Satz C 2. Jede Matrix A hat eine Lösungsmatrix.

vermittelst Induktion nach m, der Spaltenzahl von A. Für $m = 1$ haben wir den früherern Fall vor uns, wenn wir uns erinnern, dass Weglassung von Spalten (ihre Stempelung zu Identitäten) nach 29 die Aufgabe nur erleichtert.

Sei nun L eine Lösungsmatrix irgendeines A, und es werde eine Lösungsmatrix der um die Spalte a erweiterten Matrix (A,a) gesucht. Zu dem Relationensystem II tritt dann noch eine Relation: $xa \langle \mathrm{E}_{m+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir die ersten m Relationen durch ihre Lösung $x = \mathfrak{w}L$, $\mathfrak{w} \langle \mathbf{W}(L)$, ersetzen, worauf uns das System

$$\mathfrak{w}La \langle \mathrm{E}_{m+1}, \mathfrak{w} \langle \mathbf{W}$$

oder (bei geeignetem E)

$$\mathfrak{w}(E,La) \langle \mathbf{W} \cdot \mathrm{E}_{m+1}$$

vorliegt.

Da La eine Spalte ist, ist dies ein Relationensystem in $\mathfrak{w}$ von der speziellen, eingangs behandelten Art. Daher wird es (nach Satz C 2 und 33) durch

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{u}\begin{pmatrix} L_1(La) \\ E \end{pmatrix}, \ \mathfrak{u} \langle \mathbf{U},$$

bei geeignetem Vorzeichenbereich $\mathbf{U}$ allgemein gelöst. Für x haben wir demnach, wegen $x = \mathfrak{w}L$, die allgemeine Form

$$x = \mathfrak{u}\begin{pmatrix} L_1(La) \\ E \end{pmatrix} L = \mathfrak{u}L_2, \ \mathfrak{u} \langle \mathbf{U},$$

wo sich nun $L_2 = \begin{pmatrix} L_1(La) \\ E \end{pmatrix} L$ als Lösungsmatrix von (A,a) herausstellt, q. e. d.

§ 7. Angabe aller L.

39. *L explizit.* Unabhängig von diesem einfachen Existenznachweis können wir aber auch eine Lösungsmatrix L_A für allgemeines A direkt angeben, ohne Induktion zu benutzen.

Betrachten wir zunächst die speziellen $\mathbf{V}$, die nur aus E_0 und E_{-0+} zusammengesetzt sind, so wird das Relationensystem II nach Weglassung der Identitäten zu einem Gleichungssystem, das zu einem gewissen (sich eventuell auf nichts reduzierenden) Teil $\bar{A}$ der Spalten von A gehört. Auch bei der Bildung von $\mathbf{W}$ können hier, da bei Gleichungen mit jedem Punkt l auch $-l$ eine Lösung ist, nur E_0 und E_{-0+} vorkommen, und wir sehen leicht, dass es bei solchen für die Gültigkeit von $\mathbf{W}L = \mathbf{L}$ (d. h. für die Darstellbarkeit jeder Lösung aus den unter den Zeilen von L vorkommenden Lösungen) hinreichend und notwendig ist, dass L_A eine zu A gehörige Lösungsbasis G_A enthält.

Seltsamerweise reicht das Erfülltsein der durch alle diese besonderen $\mathbf{V}$ der Matrix L auferlegten Bedingungen auch für die übrigen $\mathbf{V}$ aus. Es gilt nämlich der folgende Satz, dessen Beweis das Ziel dieses Paragraphen ist:

Satz C 3. Eine Matrix L, die für jedes A_i aus A alle Zeilen eines G_{A_i} enthält, ist eine Lösungsmatrix von A.

Da es nur endlich viele A_i gibt, braucht man danach nur zu jedem von ihnen ein G_{A_i} zu bilden und diese dann untereinander zu schreiben und hat demnach hiermit ein direktes Herstellungsverfahren für L. Hierbei darf man natürlich den Fall $\mathbf{V} = \mathbf{E}_{-0}^{+m} = \mathbf{R}_m$ nicht übergehen, wo lauter Identitäten vorliegen und $\mathbf{L} = \mathbf{R}_n$ ist, so dass als Basis von L irgend eine quadratische Matrix n-ter Ordnung mit nichtverschwindender Determinante gewählt werden kann: diese Basis können wir naturgemäss mit G_{A_0} bezeichnen, wobei wir uns vorstellen, das A_0 sozusagen durch Weglassung aller Spalten aus A entsteht.

40. *Beweis.* Sei x eine beliebige Lösung des Systems II, dann wollen wir zeigen, dass x sich als $\Sigma\omega_i l_i$ darstellen lässt und daher in $\mathbf{W}L$ enthalten ist.

Wir erinnern an die Definition der x-Ecke $\Sigma^{(x)}$ als des Teilsystems aus den Gleichungen und denjenigen Ungleichungen P von Σ, für die $\mathrm{P}(x) = 0$ ist. Für jede Spalte a der Koeffizientenmatrix $A^{(x)}$ von $\Sigma^{(x)}$ ist also $xa = 0$. x lässt sich, als Lösung des zugehörigen Gleichungssystems, aus den Zeilen g von $G_{A^{(x)}}$ linear zusammensetzen. Da auch $G_{A^{(x)}}$ in L vorkommt, sind die g gewisse unter den l_i.

Betrachten wir nun diejenigen Spalten $a_1, a_2, \ldots$ aus A, die erstens nicht in $A^{(x)}$ vorkommen und zweitens in Σ zu einer Ungleichung gehören (also nicht zu einer Identität; den Gleichungen entsprechen ja lauter $A^{(x)}$-Spalten), so können wir drei Fälle unterscheiden. Entweder gibt es gar keine solchen Spalten; odsr es gibt ein a_1, und für jedes weitere a_i gilt eine Beziehung der Form $a_i = \lambda_1 a_1 + \Sigma\lambda a$, $\lambda_1 \neq 0$, wo die a ohne Index Spalten aus $A^{(x)}$ sind (dafür können wir auch sagen, dass es mod. $A^{(x)}$ genau eine Ungleichung gibt); oder es gibt mod. $A^{(x)}$ mehr als eine Ungleichung. Die ersten beiden Fälle behandeln wir im nächsten, den dritten Fall im übernächsten Abschnitt.

41. *Erster und zweiter Fall.* Im ersten Fall, wo es ausserhalb $A^{(x)}$ nur Identitäten gibt, gehören die g und $-g$ zu L, sodass

die den Zeilen g von L entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{W}$ lauter $\mathfrak{E}_{-0+}$ sind und daher die Darstellung von x als lineare Kombination der g mit beliebigen Koeffizienten schon eine der verlangten Darstellungen $\Sigma \omega_i l_i$ ist.

Im zweiten Fall ist zunächst $xa_1 \neq 0$, also gibt es mindestens ein $g = g_0$ mit $g_0 a_1 \neq 0$. Jedes a_i, $i > 1$, hat voraussetzungsgemäss die Form $\lambda_1 a_1 + \Sigma \lambda a$, wo, wegen $g_0 a = 0$,

$$g_0 a_i = \lambda_1 g_0 a_1 + \Sigma \lambda g_0 a = \lambda_1 g_0 a_1$$

und ebenso $xa_i = \lambda_1 xa_1$ ist. Sei $\frac{xa_1}{g_0 a_1} = \mu$, dann ist auch $\frac{xa_i}{g_0 a_i} = \mu \neq 0$, $\mu g_0 a_i = xa_i$. Daher sehen wir, dass $\mu g_0 < \mathfrak{L}$ ist.

Betrachten wir nun neben dem zu $A^{(x)}$ gehörigen Relationensystem $\Sigma^{(x)}$ dasjenige, das zu $(A^{(x)}, a_1)$ gehört, und also eine Relation P mehr umfasst, so wissen wir nach Satz A 1, dass wir dessen Basis $G_{(A^{(x)}, a_1)}$ durch Hinzufügung irgendeiner Zeile aus $G_{A^{(x)}}$, die von den Zeilen g_1 von $G_{(A^{(x)}, a_1)}$ unabhängig ist, zu einer Basis von $G_{A^{(x)}}$ ergänzen können, so dass x sich aus den g_1 und dieser Zeile zusammensetzen lassen muss. Als solche Zeile können wir aber g_0 wählen, da g_0 wegen $g_0 a_1 = 0$ nicht von den g_1 abhängen kann. Da auch, für irgend welches a_i, $g_1 a_i = \lambda_1 g_1 a_1 + \Sigma \lambda g_1 a = 0$ ist, gehören die g_1 und $-g_1$ zu $\mathfrak{L}$.

Der Koeffizient von g_0 in der Darstellung von x muss dasselbe Vorzeichen wie μ haben, da μg_0 den Ungleichungen dasselbe Vorzeichen erteilt wie x, womit die verlangte Form für x fertig erwiesen und dieser Fall erledigt ist.

42. *Der dritte Fall.* Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Abschnitte bei.

Hier gibt es ein von $(A^{(x)}, a_1)$ unabhängiges a_2; daher gibt es ein g_1 mit $g_1 a_2 \neq 0$. Wir bilden nun die Menge aller Punkte der Form $\xi x + \eta g_1$, wo ξ und η willkürliche Zahlen sind; es ist dies eine Ebene, auf der sich der geometrisch denkende Leser die folgenden Überlegungen veranschaulichen kann.

Welche dieser Punkte $\xi x + \eta g_1$ gehören zu $\mathfrak{L}$? $\xi x + \eta g_1 < \mathfrak{L}$ ist nach II gleichbedeutend mit $\xi x A + \eta g_1 A < \mathfrak{V}$.

Dies ist ein System von m homogenen Relationen mit zwei Unbekannten, die je einer Spalte von A entsprechen. Jedoch sind, wegen $xa = g_1 a = 0$, die $A^{(x)}$ entsprechenden Relationen und die Identitäten identisch in ξ und η erfüllt; somit bleiben nur Unglei-

chungen der Form $\xi\, x a_i + \gamma\, g_1 a_i \geq 0$ bezw. ≤ 0, $i > 1$, übrig, die auch auf die Form

$$\text{IV} \qquad \xi \geq -\gamma \frac{g_1 a_i}{x a_i}$$

gebracht werden können, da das Zeichen $\leq$, in Verbindung mit der Tatsache, dass $\xi = 1$, $\gamma = 0$, wegen $1 \cdot x + 0 \cdot g_1 \langle \mathbf{L}$, eine Lösung ist, einen Widerspruch ergäbe.

Die Ungleichungen IV lassen sich, wie jedes System von Ungleichungen der Form $\xi \geq \gamma\, \alpha_i$, durch diejenigen beiden Ungleichungen des Systems ersetzen, die zu α', dem kleinsten, und α'', dem grössten der α_i, gehören. Da $\frac{g_1 a_1}{x a_1} \neq 0$, $\frac{g_1 a_2}{x a_2} = 0$ ist, sind nicht alle α einander gleich, und es ist $\alpha' < \alpha''$.

43. *Die Reduktion.* Da

$$\xi = \alpha'', \ \gamma = 1$$

eingesetzt in IV $\alpha'' \geq \alpha_i$ und ebenso

$$\xi = -\alpha', \ \gamma = -1$$

$-\alpha' \geq -\alpha_i$ ergibt, was natürlich beides richtig ist, sind beide Systeme Lösungen von IV. Also gehören

$$x_1 = -\alpha' x - g_1$$

und

$$x_2 = \alpha'' x + g_1$$

zu $\mathbf{L}$, und es ist $x = \frac{x_1 + x_2}{\alpha'' - \alpha'}$ eine positiv homogene Form in x_1 und x_2.

Nun enthält aber $A^{(x_1)}$ mindestens eine Spalte mehr als $A^{(x)}$, da wegen $g_1 a = 0$ auch $x_1 a = 0$ ist und da für $\xi = -\alpha'$, $\gamma = -1$ in einer der Ungleichungen IV ein Gleichheitszeichen auftritt, das nur von einem Gleichheitszeichen in II herrühren kann; dasselbe gilt für $A^{(x_2)}$.

Zerlegen wir also x_1 und x_2, wenn möglich, auf dieselbe Art wie x weiter, so muss das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen. Dann erweist sich x als Kombination von Lösungen, auf die dies Verfahren nicht mehr anwendbar ist und die daher den Fällen 1 oder 2 angehören. Da diese Lösungen in $\mathbf{WL}$ liegen, und $\mathbf{WL}$ nach 32 ein Strahlenbereich mit dem Zentrum 0 ist, liegt auch ihre positive homogene Verbindung x in $\mathbf{WL}$.

Damit ist der Beweis, dass L wirklich eine Lösungsmatrix von A ist, vollendet.

§ 8. Die Lösungsbasen.

44. *Vorbereitung.* Betrachten wir eine Teilmatrix A_i (also aus i unabhängigen Spalten) von A und ein A_{i-2}, das aus dem A_i durch Streichung zweier Spalten entsteht. Streichen wir nur die eine oder nur die andere der beiden Spalten, so erhalten wir je ein A_{i-1}. Zu jedem dieser A_{i-1} lässt sich ein G, wie wir früher bemerkt haben, durch Hinzufügung einer unabhängigen Zeile zu einem gegebenen G des A_i herstellen.

Da die beiden A_{i-1} voneinander unabhängig sind und also verschiedene lineare Gebilde erzeugen, sind auch die dazu orthogonalen komplementären linearen Gebilde verschieden: d. h., dass die G der beiden A_{i-1} voneinander unabhängig sind.

Fügen wir daher zu den $n-i$ Zeilen des gegebenen G_{A_i} die beiden Zeilen hinzu, die wir einzeln zur Herstellung der $G_{A_{i-1}}$ benutzt haben, so erhalten wir $n-i+2$ voneinander unabhängige Zeilen, die auf den Spalten des A_{i-2} senkrecht stehen und also ein G dieses A_{i-2} bilden. — Man überlege sich übrigens noch, dass all dies auch für $i=2$ richtig bleibt.

Wenn wir noch bedenken, dass die hinzuzufügenden Zeilen gemäss Satz A 1 gegebenen $G_{A_{i-1}}$ entnommen werden können, so sehen wir, dass eine Matrix, die sowohl zu jedem A_i als auch zu jedem A_{i-1} aus A ein G enthält, auch für jedes A_{i-2} ein $G_{A_{i-2}}$ enthält. Durch Rekursion in bezug auf i folgt hieraus und aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz C 3:

Satz C 4. Jede Matrix, die zu jedem A_r und A_{r-1}, wo r der Rang von A ist, ein G enthält, ist eine Lösungsmatrix von A.

45. *Herstellung.* Nun erzeugen alle A_r aus A dasselbe lineare Gebilde und die G dieser A_r sind mit denen von A identisch. Nehmen wir ein solches G_A, so können wir wieder durch Hinzufügung einer geeigneten Zeile zu seinen $n-r$ Zeilen jedes der $G_{A_{r-1}}$ erhalten. Bei solchen A_{r-1}, die dasselbe lineare Gebilde erzeugen, können wir dieselbe hinzuzufügende Zeile wählen. Für jede Gruppe von solchen zusammengehörigen A_{r-1} erhalten wir dann nur eine Zeile. Bilden wir nun die Matrix H_A aus all diesen Zeilen und schreiben sie unter das G_A, so erhalten wir eine Lösungsmatrix $B_A = \binom{G_A}{H_A}$.

Die Matrix B_A enthält keine überflüssigen Zeilen, denn unter ihren Zeilen sind nur die aus G_A auf A senkrecht und also unentbehrlich, ebenso auf jedem A_{r-1} ausser den Zeilen von G_A nur die betreffende hinzugefügte Zeile aus H_A. B_A ist also eine Lösungsbasis; und jede Lösungsbasis muss sich auf die angegebene Art bilden lassen.

H_A heisst der Extremteil, G_A der Zentralteil der Basis; letzterer fällt für $r=n$ weg. $xA < W$ wird durch $x < W\binom{G}{H}$ vollständig gelöst.

In dem eben Bewiesenen sind all unsere bisherigen Ergebnisse enthalten; z. B. ergibt sich das L_A für spezielles A, das wir am Anfang des § 6 gebildet haben, durch einfache Ausrechnung nach der eben hergeleiteten Methode.

46. *Zeilenzahl.* Da jedes A_{r-1} einer Kombination von $r-1$ unter den m Spalten von A entspricht, gibt es höchstens $\binom{m}{r-1}$ Teilmatrizen A_{r-1}, und diese Zahl wird ersichtlich genau dann erreicht, wenn je $r-1$ Spalten aus A linear unabhängig sind. Erst recht hat daher der Extremteil H_A der Lösungsbasis nicht mehr als $\binom{m}{r-1}$ Zeilen, und B hat höchstens $n-r+\binom{m}{r-1}$ Zeilen; damit diese Zahl erreicht wird, müssen je zwei A_{r-1} verschiedene lineare Gebilde erzeugen, wozu jedenfalls notwendig ist, dass je r Spalten aus A linear unabhängig sind, was aber offenbar auch ausreicht.

Andererseits hat jede Basis nach Satz C 3 mindestens n Zeilen, da allein G_{A_0} n Zeilen hat (denn G_{A_0} bedeutet sinngemäss irgendeine quadratische Matrix der Ordnung n mit nichtverschwindender Determinante); für $r=1$ und $r=0$ hat die Basis genau n Zeilen. Es ist zu vermuten, dass die Zeilenzahl der Basis mindestens $n-r+p$ betragen muss, wo p die grösste Anzahl von paarweise nichtproportionalen Spalten aus A (die nicht identisch verschwinden) bedeutet. Es ist $p \geq r$. Diese Vermutung läuft geometrisch darauf hinaus, dass p Punkte, die nicht alle auf einer Hyperebene liegen, zusammen mindestens p Hyperebenen erzeugen sollen. Obwohl diese Behauptung richtig zu sein scheint, ist es mir nicht einmal für $r=3$ (d. h. in der Ebene; für "Hyperebene" ist hier "Gerade" zu setzen) gelungen, sie zu beweisen.

47. *Zusammenhang verschiedener Lösungsbasen.* Wenn wir aus den Zeilen $\binom{G}{H}$ einer Basis B diejenigen einer anderen Basis

$B_1 = \binom{G_1}{H_1}$ desselben A linear zusammenzusetzen versuchen, so wissen wir zunächst aus 17, dass sich G_1 aus den Zeilen von G allein durch lineare Kombination, d. h. durch Linksmultiplikation mit einer Matrix M_G mit $|M_G| \neq 0$ bilden lässt. Weiter lässt sich jede Zeile von H_1 gewiss als lineare Kombination der Zeilen von G und der entsprechenden (d. h. zum selben A_{r-1} gehörigen) Zeile von H darstellen, wobei letztere einen von Null verschiedenen Koeffizienten erhält, mit anderen Worten: jede H-Zeile liegt mod. G bis auf einen Zahlenfaktor fest.

Hiernach können wir die Zeilen von B_1 in der Form $M_B B$ als lineare Kombinationen der Zeilen von B so darstellen, dass bei der Bildung der G_1-Zeilen die H-Zeilen und bei der Bildung der H_1-Zeilen jedesmal alle H-Zeilen ausser einer den Koeffizienten Null erhalten, was bedeutet, dass der Multiplikator M_B die Form $\begin{pmatrix} M_G & 0 \\ M_{GH} & M_H \end{pmatrix}$ hat, wo $|M_G||M_H| \neq 0$ ist, M_G $n-r$ Zeilen hat und M_H ausserhalb der Hauptdiagonale nur Nullen hat. Wir haben die Relationen

$$\text{V} \qquad \begin{pmatrix} G_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_G & 0 \\ M_{GH} & M_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix},$$

d. h. $G_1 = M_G G$, $H_1 = M_{GH} G + M_H H$. Durch B_1 und B ist M_B festgelegt, so dass, bei gegebenem B, die B_1 und M_B einander eineindeutig entsprechen.

Wir können uns nun umgekehrt fragen, für welche Matrizen $\overline{M_B}$ das Produkt $\overline{M_B} B$ wieder eine Basis von A ist. Da $\overline{M_B} B$ einem gewissen $M_B B$ gleich sein muss, ist $(\overline{M_B} - M_B) B = 0$, und diese Bedingung genügt offenbar auch, so dass man also die $\overline{M_B}$ aus den M_B durch Addition solcher quadratischer Matrizen $\overline{B}$ erhält, für die $\overline{B} B = 0$ ist. Das sind aber die Matrizen der Form $\overline{B} = \overline{B}_1 \overline{B}_2$, wo $\overline{B}_1$ beliebig und $\overline{B}_2$ ein G von B ist.

48. *Spezielle* **V**. Für jedes **V** liefert $\mathbf{W}_v \binom{G}{H}$ alle Lösungen von II. Dabei wird jedoch der Koeffizientenbereich **W** den eindimensionalen Bereich $\mathbf{E}_0$ als Bereich einer oder mehrerer Koordinaten haben können, und zwar auf jeden Fall nur solcher Koordinaten, die den H-Zeilen entsprechen, da die G-Zeilen mit E_{-0+} multipliziert werden können und also müssen. D. h., alle Zeilen von H sind erst dann nötig, wenn wir nicht nur ein einzelnes **V**, sondern die Gesamtheit der **V** betrachten.

Statt der Gesamtheit aller **V** genügt hierzu auch die Ge-

samtheit derjenigen $\mathbf{V}$, die nur aus $\mathbf{E}_{0+}$ und $\mathbf{E}_{-0}$ gebildete Produkte sind, ohne Zulassung von $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{E}_{-0+}$, also der Orthanten: es genügen die Ungleichungssysteme mit der Koeffizientenmatrix A. Um einzusehen, dass auch schon dann keine Zeile h von H überflüssig ist, bilde man hA; hA liegt in mindestens einem abgeschlossenen Orthanten $\mathbf{V}$, für dieses $\mathbf{V}$ ist also h eine Lösung und folglich nicht überflüssig.

Wenn wir in dem Relationensystem II jede Relation $xa \leqq 0$ durch $x \cdot -a \geqq 0$ und jede Gleichung $xa = 0$ durch die beiden Ungleichungen $xa \geqq 0$ und $x \cdot -a \geqq 0$ ersetzen, so erhalten wir ein äquivalentes Relationensystem mit lauter $\begin{matrix}\leqq\\ \geqq\end{matrix}$- und $\geqq$-Zeichen, das sich in der Form $x(A, -A) \lessdot \overline{\mathbf{V}}$ schreiben lässt, wo $\overline{\mathbf{V}}$ ein Produkt von lauter $\mathbf{E}_{-0+}$ und $\mathbf{E}_{0+}$ ist. Es hätte daher überhaupt genügt, $\mathbf{E}_{-0+}$ und $\mathbf{E}_{0+}$ zu betrachten. Hat A m Spalten, so gibt es im ganzen 2^{2m} verschiedene $\mathbf{V}$ und ebensoviele $\overline{\mathbf{V}}$; geometrisch haben wir einmal die Einteilung des m-dimensionalen Raumes durch m Hyperebenen, dann, anders gedeutet, die Ecken, Kanten usw. eines Simplexes von $2m+1$ Punkten vor uns.

49. *Orthogonalisierung.* Die Zeilen eines G lassen sich bekanntlich sukzessiv orthogonalisieren und normieren, so dass $GG' = E_{n-r}$ wird, d. h. die Zeilen von G die Quadratsumme 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen. Ebenso können wir jede H-Zeile auf G senkrecht stellen und dann ihrer Quadratsumme den Wert 1 geben; die betreffende H-Zeile ist dadurch, bis auf etwaige Multiplikationen mit -1, eindeutig bestimmt, so dass sich über das Produkt zweier H-Zeilen nichts mehr aussagen lässt.

Auf diese Weise erhalten wir eine normierte Basis; ein Multiplikator, der sie in eine andere normierte Basis überführen soll, muss die Form $\begin{pmatrix} M_G & 0 \\ 0 & M_H \end{pmatrix}$ haben, wo $MM' = E_{n-r}$ ist und die Hauptdiagonalelemente von M_H durchweg ± 1, die übrigen Null sind. Wieder entspricht, bei fester Ausgangsbasis, jede andere Basis genau einem Multiplikator. Auch zu diesen Multiplikatoren können wir, genau wie früher, ein beliebiges $\overline{B}$ mit $\overline{B}B = 0$ addieren.

§ 9. Festes V.

50. *Kürzeste Darstellung.* Beschäftigen wir uns nur mit einem einzelnen $\mathbf{V}$, so können wir im Ausdruck der allgemeinen Lösung $x \lessdot \mathbf{W}_B B$ alle Zeilen b von B fortlassen, deren entspre-

chende $\mathbf{W}_B$ -Komponente $\mathbf{E}_0$ ist (d. h. wo weder $b \langle \mathbf{L}$ noch $-b \langle \mathbf{L}$ ist) und die b, denen $\mathbf{E}_{-0}$ entspricht, durch $-b$ ersetzen; hierdurch werden natürlich nur Zeilen von H verändert.

Wir erhalten so aus B eine Matrix $C = C_A = \binom{C_1}{C_2}$ derart, dass x sich in der Form

VI $\qquad x = uC_1 + vC_2$, u beliebig, $v \geq 0$,

darstellen lässt, umgekehrt jeder solche Ausdruck eine Lösung von II ist. Wir denken uns die eventuell vorkommenden überflüssigen Zeilen gestrichen, so dass sich die Zahl der Zeilen von C nicht weiter reduzieren lässt.

Es gilt also der

Satz E 2. Der Lösungsbereich $\mathbf{L}$ eines homogenen Systems ist die Summe eines (durch uC_1 erzeugten) linearen Gebildes und eines (durch vC_2 repräsentierten) Strahlenbereiches.

51. *Untersuchung von C_1.* Gehört mit $x = uC_1 + vC_2$ auch $-x$ zu $\mathbf{L}$, so erhalten wir durch Addition von uC_1 zu $-x \langle \mathbf{L}$ die Relation $-vC_2 \langle \mathbf{L}$, zu der wir die einzelnen Summanden von vC_2 addieren können, die ja, wegen $v \geq 0$, selbst in $\mathbf{L}$ liegen. Wir addieren alle diese Summanden bis auf einen; dann bleibt uns aber, da zu den Zeilen von C_2 nach Definition der Vorzeichenbereich $\mathbf{E}_{0+}$ gehört, ein Widerspruch übrig, ausser für $v = 0$.

So sehen wir, dass alle Lösungen x, die auch nach Multiplikation mit -1 Lösungen bleiben, sich in der Form uC_1 darstellen lassen müssen, und offenbar hat der Ausdruck uC_1 auch immer diese Eigenschaft. Diese x sind aber die Lösung des Gleichungssystems $xA^* = 0$, wo A^* alle Spalten von A enthält, denen in II nicht eine Identität entspricht. C_1 ist demnach — da alle überflüssigen Zeilen gestrichen wurden — irgend ein G_{A^*}, und seine Zeilenzahl q ist durch A und $\mathbf{V}$ eindeutig bestimmt.

Hieraus kann man sich auch leicht überlegen, dass der Strahlenbereich vC_2 geradenfrei ist.

52. *Untersuchung von C_2.* Die übrigen x aber lassen sich, wenn sie nicht gerade einer Zeile von C_2 "mod.C_1" positiv proportional sind, in zwei Summanden zerlegen, die einander nicht mod.C_1 positiv proportional sind. Als den einen dieser Summanden wähle man nämlich eine einzelne Zeile von C_2 mit dem (nicht verschwindenden) Koeffizienten, den sie in der Darstellung von

x hat. Wäre sie dem Rest doch positiv proportional, so wäre sie ja als überflüssig fortzulassen.

Andererseits lässt sich eine einzelne Zeile c von C_2 gewiss nicht weiter als Summe

$$(u_1 C_1 + v_1 C_2) + (u_2 C_1 + v_2 C_2), \quad v_1 \geq 0, \; v_2 \geq 0$$

von zwei Summanden darstellen, in denen noch weitere Zeilen von C_2 vorkommen. Denn sonst könnte man eine Gleichung der Form $\lambda c = u C_1 + v C_2$, $v \geq 0$, ableiten, wo c in vC_2 nicht vorkommt; für $\lambda > 0$ wäre c wieder überflüssig, für $\lambda > 0$ wäre $-c < \mathbf{L}$ und also c unter den zuerst betrachteten x enthalten, denen der Vorzeichenbereich $\mathbf{E}_{-0+}$ entspricht; schliesslich für $\lambda = 0$, $0 = uC_1 + vC_2$ würden wir aus der letzten Gleichung eine weitere Zeile von C_2 mit nichtverschwindendem Koeffizienten abtrennen, auf die linke Seite bringen und ebenso behandeln können und nun mit Sicherheit zu einem Widerspruch gelangen.

Im ganzen sehen wir also, dass die Zeilen c gewisse charakteristische Eigenschaften haben (die "extremen" Lösungen von II sind) und mod. C_1 (bis auf positive Proportionalitätsfaktoren) eindeutig festliegen. Aus dieser Betrachtung folgt offenbar, dass die Zahl der Zeilen sowohl von C_1 als auch von C_2 eindeutig bestimmte, von der Erzeugung von C unabhängige Invarianten sind.

Sei $C^{(1)}$ ein weiteres solches C_A. Wieder können wir nach den Multiplikatoren M_0 mit $C^{(1)} = M_0 C$ fragen. Da sich die Zeilen des C_1 entsprechenden Teils $C_1^{(1)}$ von $C^{(1)}$ aus denen von C_1 zusammensetzen lassen müssen, hat M_0 die Form

$$\begin{pmatrix} M_1 & O \\ M_{12} & M_2 \end{pmatrix}, \quad |M_1||M_2| \neq 0,$$

wo M_2 nach dem soeben Bemerkten in der Hauptdiagonale nur positive Elemente und ausserhalb derselben nur Nullen enthält.

53. *Positive Darstellungen.* Weiter können wir für ein einzelnes $\mathbf{V}$ auch eine solche Matrix D finden, dass $\mathbf{V}_{0+} D$ jeden Punkt des zugehörigen $\mathbf{L}$ darstellt, $\mathbf{V}_{0+} D = \mathbf{L}$, wo $\mathbf{V}_{0+}$ der Hauptorthant (eine Potenz von $\mathbf{E}_{0+}$) ist; mit anderen Worten, jede Lösung soll sich aus endlich vielen, nämlich den Zeilen von D, "linear-nichtnegativ" zusammensetzen lassen.

Denken wir uns eine solche Matrix D schon hergestellt, so können wir zu ihr offenbar noch beliebige Lösungen von II als weitere Zeilen hinzufügen. Es kommt also nur auf die Auffindung derjenigen D an, die keine überflüssigen Zeilen enthalten.

Unter den Zeilen von D wird es im allgemeinen solche

geben, die auch nach Multiplikation mit -1 Lösungen bleiben, und andere, bei denen das nicht der Fall ist; wir schreiben demgemäss $D = \binom{D_1}{D_2}$. Ist nun ein $x = vD$, $v > 0$, gegeben, dessen Koeffizientenbereich $\mathbf{E}_{-0+}$ ist, so sehen wir, indem wir wieder zu $-vD$ alle Summanden von vD bis auf einen addieren, dass in vD nur die Zeilen von D_1 vorkommen. Die Menge dieser x, d.h. die Menge aller uC_1 des vorigen Abschnittes, ist also $\mathbf{V}_0 + D_1$.

Was die dort als extrem bezeichneten x anbetrifft, die sich mod.C_1 nicht "zerlegen" lassen, so müssen sie, dieser ihrer Eigenschaften wegen, mod.C_1 gewissen Zeilen von D_2 positiv proportional sein. Da diese extremen x und C_1 (oder D_1) zur Darstellung aller x ausreichen und D_2 keine überflüssigen Zeilen enthalten soll, so ist D_2 irgendeines jener C_2, und wir haben nur noch D_1 zu finden.

54. *Zeilenzahl.* Ist die Zeilenzahl—und damit der Rang—von C_1 gleich q, d. h. uC_1 ein lineares Gebilde q-ter Dimension, so muss offenbar D_1 ebenfalls diesen Rang, also mindestens q unabhängige Zeilen haben. Da aber die Zerlegung jedes uC_1 in solche q Zeilen eindeutig bestimmt ist, und daher für gewisse uC_1 sicher negative Koeffizienten vorkommen werden, kann D_1 nicht bloss q Zeilen haben. Wir wollen uns nicht weiter mit der Untersuchung aller möglichen D_1 abgeben, sondern zeigen hier nur, dass es D_1 mit $q+1$ Zeilen wirklich gibt [1].

55. *Herstellung von D_1.* Es habe also das gesuchte D_1 die $q+1$ Zeilen $d_1, \ldots, d_{q+1}$, wo (eventuell nach Zeilenumstellung) d_1 bis d_q linear unabhängig (also die Zeilen eines G_1) seien und $d_{q+1} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i d_i$ sei. Jeder Punkt unseres linearen Gebildes lässt sich also in der Form

$$\sum_{i=1}^{q+1} \mu_i d_i, \quad \mu_i \geq 0$$

darstellen; hieraus sehen wir, dass, wenn etwa $\lambda_k > 0$ ist, wir statt

---

[1] Die anderen D_1 erhält man übrigens folgendermassen: Man zerlege das lineare Gebilde uC_1 in endlich viele "komplementäre" lineare Teilgebilde; jeder solche Zerlegungstyp entspricht einer Zerlegung von q in eine Summe natürlicher Zahlen. Dann bestimme man zu jedem Teilgebilde ein D_1 nach dem im Text weiter unten angegebenen Verfahren und schreibe schliesslich die so erhaltenen Matrizen untereinander.

d_{q+1} auch $d'_{q+1} - \sum_{i \neq k} \lambda_i d_i$ hätten wählen können, indem wir

$$\sum_{i=1}^{q+1} \mu_i d_i = \sum_{i \neq k, q+1} \mu_i d_i \quad + \mu_{q+1} d'_{q+1} + (\mu_k + \lambda_k \mu_{q+1}) d_k$$

schreiben. Für d_{q+1} ist aber λ_k zu Null geworden, während die übrigen λ_i unverändert bleiben.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens können wir erreichen, dass alle $\lambda_i \leq 0$ sind. Wäre aber nunmehr etwa $\lambda_i = 0$, so könnten wir $-d_i$ überhaupt nicht darstellen. Also waren von vornherein alle $\lambda_i < 0$. Wir schreiben nun symmetrischer $\sum_{i=1}^{q+1} \varkappa_i d_i = 0$, $\varkappa_i > 0$. Es sind also je q Zeilen von D linear unabhängig.

Umgekehrt können wir so aus jedem C_1 beliebig viele D_1 bilden: wir fügen einfach die Zeile $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i d_i$ hinzu, wo d_i die Zeilen des C_1 und die λ_i durchweg negativ, im übrigen beliebig sind. Schreiben wir $Q_1 = \binom{E_q}{l}$, wo l die Zeile der λ_i ist, so wird $D_1 = Q_1 C_1$, und für jedes andere $D_1^{(1)}$ ist ebenso $D_1^{(1)} = Q_1^{(1)} C_1^{(1)}$ für ein gewisses $C_1^{(1)}$. Dabei ist jedes $C_1^{(1)}$ von der Form $M_0 C_1$, mit $|M_0| \neq 0$.

Demnach erhalten wir schliesslich jedes beliebige D_1 von $q+1$ Zeilen aus einem gegebenen C_1 durch Linksmultiplikation mit einer Matrix Q der Form

$$Q = \binom{E_q}{l} M_C, \quad |M_C| \neq 0, \quad l < 0.$$

Das sind offenbar alle diejenigen Matrizen aus q Spalten, zwischen deren $q+1$ Zeilen eine einzige lineare Beziehung, und zwar mit positiven Koeffizienten $\varkappa_i$ besteht. Solche Matrizen werden wir im weiteren stehende Simplexmatrizen nennen (die Transponierten dazu mögen liegende Simplexmatrizen heissen). Unter ihnen heben wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & -1 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hervor, für die alle $\varkappa_i = 1$ sind; auch für die Matrix $\begin{pmatrix} E_q \\ -1_q \end{pmatrix}$ sind die $\varkappa_i = 1$.

56. *Ergänzende Bemerkungen.* Geometrisch stellt Q, wie sich aus den Überlegungen des § 14 leicht ergibt, irgend ein den Nullpunkt im Inneren enthaltendes Simplex dar. Die μ_i lassen sich als eine Art von Simplexkoordinaten ansehen, die sich für $\mu_i=1$ zu den unter diesem Namen bekannten verhält, wie eine arithmetische Proportion zu einer geometrischen: sie sind nämlich nicht bis auf einen Faktor, sondern bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt. (Die Konstante musste vorhin speziell so gewählt werden, dass die $\mu_i \geq 0$ bleiben).— Man kann auch von einer Projektion des Hauptorthanten des nächsthöheren Raumes R_{q+1} auf eine geeignete Stützhyperebene durch den Nullpunkt sprechen.

Suchen wir nun wieder die Multiplikatoren für unsere D auf, so sei also $D^{(1)}$ ein weiteres solches D_A. Auf jeden Fall können wir auch hier einen Multiplikator M_D mit $D^{(1)} = M_D D$ finden, der die Form $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_{12} & M_2 \end{pmatrix}$, $|M_1||M_2| \neq 0$ hat, wo M_2 in der Hauptdiagonale nur positive Elemente und ausserhalb ihrer nur Nullen enthält, und die Zeilen von M_1 denen von D_1 entsprechen.

M_1 muss nun den Übergang von einem Simplex zu einem anderen bewirken, das den Nullpunkt gleichfalls enthält, d. h. $M_1 Q$ muss der oben für Q angegebenen Bedingung genügen, eine Simplexmatrix zu sein. — Seien die Koeffizienten in der zu Q gehörigen linearen Bedingung wieder $\varkappa_i$ und entsprechend $\varkappa_i^{(1)}$ für $M_1 Q$. Die Zeile aus den $\varkappa_i$ bezw. $\varkappa_i^{(1)}$ sei k bezw. $k^{(1)}$. Dann soll $k^{(1)} M_1 Q = 0$ gelten. $k^{(1)} M_1$ ist selbst eine Zeile $\bar{k}$ und da $\bar{k} Q = 0$ eine lineare Bedingung für die Zeilen von Q darstellt, diese aber nur einer einzigen linearen Bedingung unterworfen sein sollen, muss $\bar{k} = \mu k$, d. h. $k^{(1)} M_1 = \mu k$ sein, was offenbar auch hinreicht. Die notwendige und hinreichende Bedingung für M_1 ist also für alle Q, zu denen die gleichen $\varkappa_i$ gehören, die gleiche, nämlich $(k^{(1)}, \mu)\begin{pmatrix} M_1 \\ -k \end{pmatrix} = 0$ für geeignetes $k^{(1)} > 0$, d. h.: $\begin{pmatrix} M_1 \\ k \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} M_1 \\ -k \end{pmatrix}$ muss eine Simplexmatrix sein.

Im übrigen lassen sich, wie man leicht überlegt, die Elemente von M_1 und M_{12} als Simplexkoordinaten sämtlich ≥ 0 wählen.

§ 10. Inhomogene Systeme.

57. *Die Homogenisierung.* Wir gehen jetzt zur Betrachtung inhomogener Systeme Σ: $xA+c \lessdot \mathbf{V}$ über, schliessen aber die echten Ungleichungen noch aus. Solche Systeme behandeln wir, indem wir zu den n Unbekannten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (den Koordinaten von x) eine weitere Unbekannte ξ hinzunehmen und die absoluten Glieder als Koeffizienten von ξ ansehen, wobei allerdings noch die inhomogene Relation $\xi = 1$ dazukommt.

$\xi = 1$ ist eine nicht durch den Nullpunkt gehende Hyperebene im $\mathbf{R}_{n+1}$, auf der die Lösungen liegen müssen. Lassen wir die Bedingungen $\xi = 1$ fort, so entspricht das geometrisch der Verbindung der Lösungspunkte mit dem Nullpunkt, der hier im Grunde genommen (projektiv) nur die Rolle irgend eines ausserhalb des ursprünglichen Gesamtraumes $\mathbf{R}_n$ gelegenen Punktes spielt.

Wenn wir die Lösungspunkte vom neuen Nullpunkt aus nicht durch ganze Geraden, sondern nur durch die abgeschlossenen Halbstrahlen projizieren, so haben wir die Bedingung $\xi = 1$ durch diejenige $\xi \lessdot E_{0+}$ ersetzt, und damit nimmt das System eine Gestalt an, die sich dem bisherigen Rahmen einfügt.

Wir können daher für dieses neue System Σ' die allgemeine Lösung in der Form $x = \omega L$, $\omega \lessdot \mathbf{W}$ schreiben. Da wir uns jetzt auf die Betrachtung eines bestimmten $\mathbf{V}$ beschränken wollen, können wir aus L diejenigen Zeilen weglassen, die doch nur mit Null multipliziert würden, deren Vorzeichenbereich also $\mathbf{E}_0$ ist, und die Zeilen, denen $\mathbf{E}_{-0}$ entspricht, mit -1 multiplizieren, sodass $\mathbf{W}$ nunmehr nur aus $\mathbf{E}_{0+}$ und $\mathbf{E}_{-0+}$ zusammengesetzt ist.

58. *Die drei Bestandteile.* Wir wollen in L drei Sorten von Zeilen unterscheiden und jeweils zu einer Teilmatrix L_1, bezw. L_2, bezw. L_3 zusammenfassen, so dass also die allgemeine Lösung die Gestalt $\omega = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3$ erhält.

Und zwar rechnen wir zu L_1 diejenigen Zeilen, denen $\mathbf{E}_{-0+}$ entspricht; da sie auch nach Multiplikation mit -1 der Ungleichung $\xi \lessdot \mathbf{E}_{0+}$ genügen sollen, kann die letzte, ξ entsprechende Zahl in jeder dieser Zeilen nur Null sein. ω_1 ist offenbar beliebig.

Weiter fassen wir unter den übrigen Zeilen, denen also $\mathbf{E}_{0+}$ entspricht, diejenigen zu L_2 zusammen, die ebenfalls mit

einer Null enden. $\mathfrak{w}_2$ ist ≥ 0 und im übrigen beliebig. — Die Zeilen von L_1 und L_2 sind keine Lösungen des ursprünglichen Systems Σ, wo $\xi = 1$ sein soll.

Schliesslich rechnen wir zu L_3 die nicht auf eine Null endenden Zeilen; deren letzte Koordinate ist also, da die Zeilen selbst Lösungen darstellen, positiv und kann, nach Multiplikation der betreffenden Zeile mit einem geeigneten Zahlenfaktor, als 1 angenommen werden. Es ist auch $\mathfrak{w}_3 > 0$; jedoch bewirkt die Bedingung $\xi = 1$, die wir jetzt wieder mit in Betracht ziehen, dass die letzte Koordinate von $\mathfrak{w}_3 L_3$, d. i. die Summe der Koordinaten von $\mathfrak{w}_3$, die wir vektoriell $\mathfrak{w}_3 \cdot 1$ schreiben, gleich eins sein soll. Im übrigen ist $\mathfrak{w}_3$ beliebig.

Es hat sich also ergeben:

Satz C 5. Die allgemeine Lösung eines inhomogenen abgeschlossenen Relationensystemes I hat die Form

VII $\quad x = \mathfrak{w}_1 L_1 + \mathfrak{w}_2 L_2 + \mathfrak{w}_3 L_3, \quad \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_3 \geq 0, \quad \mathfrak{w}_3 \cdot 1 = 1.$

Hierbei denken wir die $(n+1)$-ten Koordinaten weggelassen und befinden uns wieder im $\mathbf{R}_n$. Da in L hinsichtlich Σ' keine überflüssigen Zeilen vorkamen, so sind natürlich auch in bezug auf Σ alle Zeilen von L nötig.

Dabei ist für jede Zeile l von L_1 und für jede Relation $xa + \gamma < \mathbf{E}$ aus unserem System Σ das Produkt $\omega(l,0)\binom{\alpha}{\gamma} = \omega la$ für jedes ω in $\mathbf{E}$ gelegen; ist also $\mathbf{E} \dotplus \mathbf{E}_{-0+}$, so ist $la = 0$.

59. *Unrunde Mengen.* $\mathfrak{w}_1 L_1$ stellt die Punkte des von den Zeilen des L_1 erzeugten linearen Gebildes dar. $\mathfrak{w}_2 L_2$ ist (vgl. 51) ein geradenfreier konvexer polyedraler Strahlenbereich. Schliesslich ist $\mathfrak{w}_3 L_3$ nach 20 das von den Zeilen von L_3 erzeugte konvexe Polyeder. Da $\mathbf{L}$ eine beliebige abgeschlossene unrunde Menge ist, sehen wir:

Satz E 3. Jede abgeschlossene unrunde Menge lässt sich als Summe eines linearen Gebildes, eines konvexen polyedralen Strahlenbereiches und eines konvexen Polyeders herstellen[1]).

[1]) Allgemeiner ist jede ganzseitige konvexe Menge als Summe eines linearen Gebildes und einer geradenfreien konvexen Menge darstellbar, und zwar (bis auf Parallelverschiebungen) auf eindeutige Weise; die obige weitergehende Zerlegung in eine beschränkte Menge und einen Strahlenbereich lässt sich indessen im allgemeinen nicht durchführen.

Die drei Gebilde können auch, einzeln oder zwei zugleich wegfallen.

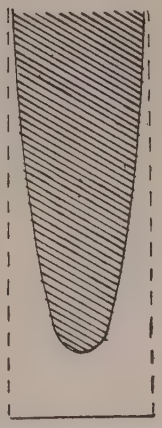
Ist $x+\lambda y$ für jedes $\lambda \geq 0$ eine Lösung von Σ, so ist $(x+\lambda y, 1)$ eine Lösung von Σ', ebenso auch $\lim_{\lambda^{-1}\to 0} (\frac{x}{\lambda}+y, \frac{1}{\lambda}) = (y, 0)$. Daher hat dann y die Form $w_1 L_1 + w_2 L_2$, $w_2 \geq 0$. $x + w_1 L_1 + w_2 L_2$, $w_2 \geq 0$ stellt also den grössten in $\mathbf{L}$ enthaltenen Strahlenbereich mit dem Zentrum x dar.

Soll $\mathbf{L}$ selbst ein Strahlenbereich sein, so kann daher jeder Punkt des Polyeders $w_3 L_3$ als Zentrum gewählt werden, und also muss, da keine Zeile von L_3 überflüssig sein sollte, das Polyeder sich auf einen Punkt reduzieren, d. h. L_3 hat dann nur eine Zeile. (Mindestens eine — und sei es auch identisch verschwindende — Zeile müssen wir in L_3 stets aufnehmen, um der Bedingung $w_3 \cdot 1 = 1$ genüge tun zu können.) Es wird die allgemeine Lösung nunmehr

$$x = w_1 L_1 + w_2 L_2 + L_3, \quad w_2 \geq 0.$$

Durch $x = w_1 L_1 + L_3$ werden, wie man sich leicht überlegt, gerade alle Zentren von $\mathbf{L}$ dargestellt.

60. *Geometrische Bemerkungen.* Offenbar ist die Projektion einer konvexen Menge auf eine Gerade wieder konvex. Jedoch braucht die Projektion einer konvexen abgeschlossenen Menge im allgemeinen nicht abgeschlossen zu sein (s. Fig.). Für eine unrunde Menge $\mathbf{L}$ gilt aber auch das. Bilden wir nämlich, für einen festen Vektor a, auf den wir projizieren wollen, die Produkte $xa = w_1 L_1 a + w_2 L_2 a + w_3 L_3 a$, so erhalten wir einen Ausdruck der Form $\Sigma \omega_i l_i a$, wo die $l_i a$ feste Zahlen sind und jedes ω_i ganz beliebig oder beliebig, aber positiv ist, und nur noch die Summe gewisser ω_i gleich eins sein muss; dieser Ausdruck nimmt aber seine Extremalwerte offenbar wirklich an.



Aus den Betrachtungen der letzten Paragraphen erkennen wir die geometrische Funktion der Lösungsmatrix L eines homogenen Systems. Wir fassen dazu die Veränderlichen als homogene Koordinaten in projektiven $\mathbf{R}_{n-1}$ auf; dann zerfällt dieser durch die den P entsprechenden endlich vielen Hyperebenen in endlich viele unrunde Raumteile, und aus solchen Raumteilen muss sich

der Lösungsbereich von Σ zusammensetzen. Dabei genügen zur Charakterisierung und Darstellung aller dieser Raumteile und Lösungsbereiche die endlich vielen "Eckpunkte" (unabhängigen Randgebilde), nämlich die Zeilen von H_A, verbunden mit dem allen Hyperebenen gemeinsamen von G_A erzeugten linearen Gebilde. G und H entsprechen übrigens dem ersten und zweiten Fall im Beweise des Satzes C 3.

61. *Echte Ungleichungen.* Das homogene Relationensystem $xA < \mathbf{V}$ lässt sich nach Satz C 2 in der Form $x = \mathfrak{w}A^{(1)}$, $\mathfrak{w} < \mathbf{W}$ lösen. Es sei a eine Spalte von A, der eine Ungleichung entspricht. Schreiben wir $x = \mathfrak{w}A^{(1)} = \Sigma\omega a^{(1)}$, wo $a^{(1)}$ die Zeilen von $A^{(1)}$ und ω die Koordinaten von $\mathfrak{w}$ durchläuft, so haben wir $xa = \Sigma\omega a^{(1)}a$; dabei hat schon jedes von Null verschiedene $\omega a^{(1)}a$ für sich das durch die Ungleichung geforderte Vorzeichen. Damit $xa = 0$ ist, muss also jedes der $\omega a^{(1)}a$ verschwinden, d. h., dass für $a^{(1)}a \neq 0$ auch $\omega = 0$ sein muss.

Die Ersetzung einer Ungleichung durch die entsprechende Gleichung wirkt sich also auf x dahin aus, dass gewisse $\mathfrak{w}$-Koordinaten zugleich verschwinden müssen. Wird umgekehrt die Ungleichung durch die entsprechende echte Ungleichung ersetzt, in der das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist, so muss mindestens eine dieser $\mathfrak{w}$-Koordinaten $\neq 0$ sein. Damit haben wir die parametrische Darstellung der allgemeinen Lösung auf irgendwelche endlichen Systeme von homogenen Relationen ausgedehnt, die beliebige der fünf Zeichen $= \geq \leq > <$ enthalten.

Nun sei uns als allgemeinster Fall ein inhomogenes System gegeben, in dem auch echte Ungleichungen zugelassen sind. Dann können wir das System durch Hinzunahme einer neuen Unbekannten homogenisieren und darauf wie oben behandeln, oder aber auch alle > 0 und < 0 durch $\geq \eta$ und $\leq -\eta$ ersetzen, sodann die Relation $\eta > 0$ hinzunehmen und dann erst homogenisieren; wir haben damit die Zahl der echten Ungleichungen auf eine einzige ($\eta > 0$) herabgesetzt. Übrigens war die Homogenisierung selbst ein Fall, wo (im wesentlichen) die echte Ungleichnng $\xi > 0$ auftrat.

Geometrisch schliessen wir mit der Ersetzung eines Teiles der Ungleichungen durch echte Ungleichungen höchstens gewisse Teile des Randes der konvexen Menge aller Lösungen aus und erhalten so die allgemeinste unrunde Menge.

KAPITEL III. LÖSBARKEITSKRITERIEN.

§ 11. Kleinste unauflösbare Systeme.

62. *Definition.* Wir wollen im § 12 untersuchen, welche Relationensysteme (die ganz allgemein, also teils homogen, teils inhomogen, gedacht sind, und in denen auch echte Ungleichungen vorkommen dürfen) unauflösbar sind.

Ein unauflösbares System bleibt nach Hinzunahme weiterer Relationen natürlich immer noch unauflösbar. Die Unauflösbarkeit eines Systems kann also auf der Unauflösbarkeit eines Teilsystems beruhen; von diesem kann man eventuell wieder zu einem Teilsystem übergehen, muss aber schliesslich zu einem Ende kommen, d. h. zu einem kleinsten unauflösbaren System (k.u.S.) gelangen, dessen echte Teilsysteme sämtlich auflösbar sind.

Jedes unauflösbare System enthält mindestens ein k.u.S., und daher untersuchen wir zunächst diese. Dabei ist unser Hauptziel, Satz D 1 zu beweisen. — Vorerst bemerken wir, das ein k.u.S. auch aus einer einzigen Relation, z.B. $1 \leq 0$ bestehen kann und jedenfalls keine Identitäten enthält.

63. $\mathbf{L}$ *und* $\bar{\mathbf{L}}$. Es möge uns nun ein solches k.u.S. Σ in der Form $xA + c \lessdot \mathbf{V}$ gegeben sein; A habe n Zeilen und m Spalten. Nach Entfernung irgend einer Relation P: $xa + \gamma \lessdot \mathbf{E}$ erhalten wir ein auflösbares Teilsystem $\Sigma - \mathrm{P}$, dessen allgemeine Lösung y sei; ersetzen wir dabei jede Relation durch die entsprechende abgeschlossene Relation, so bleibt das System auflösbar, und seine allgemeine Lösung $\bar{y}$ hat, wie wir früher gesehen haben (Satz C 5), die Form $\bar{y} = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3$, $w_2, w_3 \geq 0$, $w_3 \cdot 1 = 1$. Die Menge aller y sei $\mathbf{L}$, die aller $\bar{y}$ sei $\bar{\mathbf{L}}$. Da $\mathbf{L}$ ganzseitig ist, ist $\bar{\mathbf{L}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathbf{L}$ (nach Satz F 2).

$ya + \gamma$ nimmt gewiss keinen Wert aus $\mathbf{E}$ an, da sonst das ganze System auflösbar wäre. Nimmt aber $\bar{y}a + \gamma$ für $\bar{y} = y_0$ einen Wert $\alpha \neq 0$ aus $\mathbf{E}$ an, so folgt, da man y beliebig nahe an y_0 wählen kann, dass auch $ya + \gamma$ beliebig nahe an α gebracht werden kann, was sich mit der Unauflösbarkeit des Gesamtsystems Σ nicht vereinbaren lässt. Wir sehen also:

$\bar{y}a + \gamma$ kann aus dem Wertvorrat $\mathbf{E}$ höchstens den Wert Null annehmen.

Analog sieht man ein, dass $\overline{ya} + \gamma$ nicht sowohl positiver als auch negativer Werte fähig sein kann.

64. *Die z-Ecke.* In 60 sahen wir, dass $\overline{\mathbf{L}}a$, die Projektion von $\mathbf{L}$ auf a, eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}_1$ ist; dasselbe gilt also für $\overline{\mathbf{L}}a + \gamma$. Daher gibt es genau eine Zahl ζ, für die $|\overline{ya} + \gamma|$ zu einem Minimum wird und jenseits welcher, vom Nullpunkt aus gesehen, $\overline{\mathbf{L}}a + \gamma$ liegen muss; dabei ist $\zeta = 0$ nicht ausgeschlossen. Mit anderen Worten: es gilt

(1) $$|\overline{ya} + \gamma| \geq \zeta$$

und für $\zeta \neq 0$

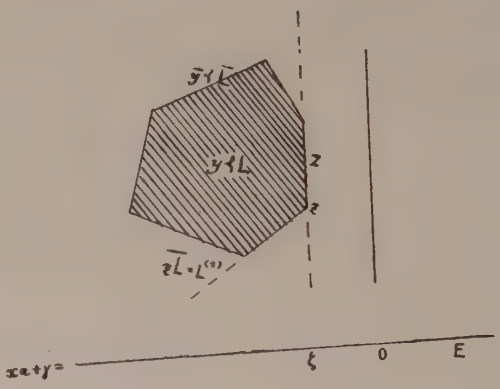
(2) $$\operatorname{sg}(ya + \gamma) = \operatorname{sg} \zeta.$$

Sei nun $\mathbf{Z}$ die, nicht leere, Menge aller $\overline{y}$, für die dieser Extremalwert ζ erreicht wird, und sei z ein Punkt von $\mathbf{Z}$, also

(3) $$za + \gamma = \zeta.$$

(s. die Figur, bei der jedoch zu beachten ist, dass sie einen Fall darstellt, dessen Unmöglichkeit für ein k.u.S. wir sogleich beweisen werden).

Nun betrachten wir die z-Ecke von Σ—P, also das System $\Sigma^{(1)}$ aller Relationen $P^{(1)}$ aus Σ—P, für die $P^{(1)}(\mathbf{L}) = 0$ gilt; dann ist nach Satz E 1, da $z < \overline{\mathbf{L}}$ ist, der Strahlenbereich $\overline{z\mathbf{L}}$ mit dem Lösungsbereich $\mathbf{L}^{(1)} = \mathbf{L}(\Sigma^{(1)})$ identisch; Identitäten kommen ja nicht vor.



65. $\mathbf{L}$ *als Strahlenbereich.* Kann das System $(\Sigma^{(1)}, P)$ auflösbar sein? D. h., kann es einen Punkt $p < \mathbf{L}^{(1)}$ geben, sodass $pa + \gamma < \mathbf{E}$ gilt? p hat als Punkt von $\mathbf{L}^{(1)} = \overline{z\,\mathbf{L}}$ die Form $z + \lambda y$, $\lambda > 0$, oder es könnte, für $z < \mathbf{L}$, $p = z$ sein; letzteres ist aber ausgeschlossen, da sonst auch Σ die Lösung z haben würde. Aus $p = z + \lambda y$ folgt $pa + \gamma = \zeta + \lambda(ya + \gamma)$.

Ist nun $\zeta \neq 0$, so ist wegen (1) und (2)

$$|\zeta + \lambda(ya + \gamma)| \geq |\zeta| \quad \text{und} \quad \operatorname{sg}(\zeta + \lambda(ya + \gamma)) = \operatorname{sg} \zeta;$$

da ζ nach 63 als Wert von $\overline{ya} + \gamma$ für $\zeta \neq 0$ nicht in $\mathbf{E}$ liegt, kann $pa + \gamma$ erst recht nicht in $\mathbf{E}$ liegen.

Sei daher $\zeta = 0$, dann wird $\mathfrak{p}\mathfrak{a} + \gamma = \lambda(\mathfrak{y}\mathfrak{a}+\gamma)$, $\lambda > 0$, und wir hätten mit $\mathfrak{p}\mathfrak{a} + \gamma < \mathbf{E}$ auch $\mathfrak{y}\mathfrak{a} + \gamma < \mathbf{E}$, was wieder die Lösbarkeit von Σ zur Folge hätte.

So ist also die oben gestellte Frage zu verneinen: das System $(\Sigma^{(1)},\mathrm{P})$ ist unauflösbar und daher als Teilsystem des k.u.S. Σ mit diesem identisch. Wir sehen, dass $\mathfrak{z}$ alle Linearformen bis auf die ausgeschlossene zu Null macht.

Aus $\Sigma^{(1)} = \Sigma - \mathrm{P}$ folgt nun $\overline{\mathfrak{z}\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{(1)} = \mathbf{L}$, so dass wir also den Satz bewiesen haben:

Satz E 4. Der Lösungsbereich $\mathbf{L}$ eines Systems, das aus einem k.u.S. durch Streichung einer einzigen Relation entsteht, ist ein Strahlenbereich.

66. $\mathbf{Z}$ *als lineares Gebilde.* Da $\overline{\mathbf{L}}$ aus $\mathbf{L}$ durch Hinzufügung von durch $\mathfrak{z}$ gehenden Hyperebenen entsteht, ist auch $\overline{\mathbf{L}}$ ein Strahlenbereich, und dann besteht nach 59 der polyedrale Teil L_3 aus nur einer Zeile. Es wird

$$\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{w}_1 L_1 + \mathfrak{w}_2 L_2 + L_3, \quad \mathfrak{w}_2 \geq 0$$

und $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{a}} = \mathfrak{w}_1 L_1 \mathfrak{a} + \mathfrak{w}_2 L_2 \mathfrak{a} + L_3 \mathfrak{a}$; da, nach 63, $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{a}} + \gamma$ und also auch $\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{a}}$ nicht alle Werte annimmt, und also auch $\mathfrak{w}_1 L_1 \mathfrak{a}$ nicht alle Werte durchläuft, während doch $\mathfrak{w}_1$ beliebig ist, ist der Wert von $L_1 \mathfrak{a} = 0$. Da nach 58, und weil das System keine Identitäten enthält, jede Zeile L_1, mit jeder Spalte von A multipliziert, Null ergibt, und dasselbe nunmehr auch für die ausgeschlossene Spalte $\mathfrak{a}$ gilt, ist überhaupt $L_1 A = 0$.

Umgekehrt kann natürlich jede Zeile l, für die $lA = 0$ ist, bei Addition zu $\overline{\mathfrak{y}}$ den Wert von $\overline{\mathfrak{y}}A$ nicht ändern, so dass auch sie, wie man aus dem über die Eigenschaften der Summanden von $\overline{\mathfrak{y}}$ öfters Bemerkten ohne weiteres herleitet, eine lineare Kombination der Zeilen von L_1 sein muss. Da L_1 nach Definition keine überflüssigen Zeilen hat, ist L_1 irgend ein G_A und hat also $n-r$ Zeilen, wo r der Rang von A ist. Für $r = n$ ist $L_1 = 0$. Ohne weiteres sieht man auch, dass L_1 irgend ein $G_{A^{(1)}}$ ist, und der Rang $r^{(1)}$ von $A^{(1)}$ ist also gleich r.

Jedes Element $\mathfrak{z} < \mathbf{Z}$ hat als Zentrum von $\mathbf{L}$ nach 59 die Form $\mathfrak{z} = \mathfrak{w}_1 L_1 + L_3$, und da, wegen 64, (3),

$$(\mathfrak{w}_1 L_1 + L_3)\ \mathfrak{a} = L_3 \mathfrak{a} = \zeta - \gamma$$

von $\mathfrak{w}_1$ nicht abhängt, wird $\mathfrak{w}_1 L_1 + L_3$ auch immer ein $\mathfrak{z}$ darstellen. Z ist also, da L_1 $n-r$ unabhängige Zeilen hat und $\mathfrak{w}_1$ beliebig ist, eine lineare Mannigfaltigkeit $(n-r)$-ter Dimension, welche

m—1 unter den m Gleichungen genügt, die den Relationen von A entsprechen; und zwar genau m—1, ausser für $\zeta = 0 \langle \mathbf{E}$.

67. *Echte Ungleichungen.* Im Ausnahmefall $\zeta = 0$ wird sicher $xA + c \langle \mathbf{V}$ auflösbar, wenn wir jede Relation durch die entsprechende abgeschlossene Relation ersetzen.

Es muss dann mindestens eine echte Ungleichung geben, und wir können allgemein, falls es eine echte Ungleichung gibt, annehmen, dass das gerade $xa + \gamma \langle \mathbf{E}$ ist. Dieser Ungleichung entspricht ein offener Halbraum; ich behaupte, dass wir diesen Halbraum durch eine der in ihm enthaltenen Hyperebenen (die seiner Begrenzung parallel sind) ersetzen können, d.h. unsere Ungleichung durch eine Gleichnng $xa + \delta = 0$, ohne dass das System aufhört, ein k. u. S. zu sein.

In der Tat bleibt das System unauflösbar, da ja nur eine Verschärfung stattgefunden hat. Aber jedes auflösbare Teilsystem war ein z-Strahlenbereich, wo z dem offenen Halbraum nicht angehört; dringt ein solcher Strahlenbereich in den Halbraum ein, so muss er auch jede der dem Rand parallelen Hyperebenen durchsetzen. Damit ist die Ersetzung der Ungleichungen gerechtfertigt.

Indem wir so mit jeder echten Ungleichung verfahren, gelangen wir schliesslich zu einem abgeschlossenen k.u.S., dessen Hyperebenen den ursprünglichen parallel sind, d. h. A ist unverändert geblieben.

68. *Es ist* $r = m-1$. Daher liegt jetzt gewiss nicht der Ausnahmefall von 66 vor. Dann schliessen wir aber wie folgt weiter:

Je nach Wahl der wegzulassenden Relation erhalten wir jetzt m lineare Mannigfaltigkeiten, die voneinander unabhängig sind, da je m—1 einer Gleichung genügen, der die m-te nicht genügt. Wir können aus einer der Mannigfaltigkeiten n—r und aus jeder der übrigen Mannigfaltigkeiten einen von den übrigen linear unabhängigen Punkt wählen und sehen so, dass der von den linearen Manigfaltigkeiten zusammen erzeugte Raum mindestens die Dimension m—$1+n$—r hat. Der Gesamtraum ist von der Ordnung n, also ist $n \geq m$—$1+n$—r, d.h. $r \geq m - 1$.

Es ist, da m voneinander unabhängige Linearformen jedes Wertsystem annehmen, $r < m$ und also $r = m - 1$. Hier sind mithin die Spalten jedes der m Teilsysteme $A^{(1)}$ voneinander unabhängig.

Diese Resultate gelten nun aber auch für Systeme mit echten Ungleichungen, da sich bei dem in 67 beschriebenen Verfahren A ja gar nicht geändert hat. So hat sich schliesslich ergeben:

Satz D1. Der Rang der zu einem k.u.S. gehörigen Koeffizientenmatrix ist um eins kleiner als die Anzahl der Relationen, aus denen das System besteht.

$\left(\begin{smallmatrix} A \\ c \end{smallmatrix}\right)$ hat den Rang $m - 1$ oder m, und demgemäss zerfallen die k.u.S. in zwei Sorten, die man nach der Art von $\mathbf{V}$ weiter unterteilen kann; der Rang $m - 1$ entspricht eben dem Ausnahmefall $\zeta = 0$.

§ 12. Unauflösbarkeit.

69. *Das Kombinationsprinzip.* Sei nun $xA + c \lessdot \mathbf{V}$ irgendein unauflösbares System, dann enthält es gewiss ein k. u. S. $xA^{(1)} + c^{(1)} \lessdot \mathbf{V}^{(1)}$. Wir haben bewiesen, dass je i der $i + 1$ Spalten von $A^{(1)}$ linear unabhängig sind. Für $i \leq k \leq r$ können wir zu solchen i Spalten $k - i$ von ihnen und voneinander unabhängige Spalten aus A hinzufügen, und diese gehören nicht zu $A^{(1)}$. So erhalten wir aus $A^{(1)}$ eine Matrix $A^{(2)}$ mit $k + 1$ Spalten und ein entsprechendes System $xA^{(2)} + c^{(2)} \lessdot \mathbf{V}^{(2)}$. Wir schreiben hierfür

$$xA^{(2)} = v^{(2)} - c^{(2)}, \quad v^{(2)} \lessdot \mathbf{V}^{(2)}.$$

Dann haben wir für jedes $v^{(2)} \lessdot \mathbf{V}^{(2)}$ ein unauflösbares Gleichungssystem vor uns, dessen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A^{(2)} \\ v^{(2)} - c^{(2)} \end{smallmatrix}\right)$ bekanntlich einen grösseren Rang als den Rang k von $A^{(2)}$ haben muss; $\left(\begin{smallmatrix} A^{(2)} \\ v^{(2)} - c^{(2)} \end{smallmatrix}\right)$ hat also den Rang $k + 1$.

Mögen nun irgend welche k unabhängige Zeilen von $A^{(2)}$ die Matrix $A^{(3)}$ bilden. Solche $A^{(3)}$ gibt es, da $A^{(2)}$ den Rang k hat, und es sind (Satz A 4) die entsprechenden Unterdeterminanten k-ter Ordnung verschiedener $A^{(3)}$ einander proportional. Dann ist auch schon $\left(\begin{smallmatrix} A^{(3)} \\ v^{(2)} - c^{(2)} \end{smallmatrix}\right)$ vom Range $k + 1$, d. h. es ist $\left|\begin{smallmatrix} A^{(3)} \\ v^{(2)} - c^{(2)} \end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Die Gleichung $\left|\begin{smallmatrix} A^{(3)} \\ v^{(2)} \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} A^{(3)} \\ c^{(2)} \end{smallmatrix}\right|$, wo die neuen Unbekannten $v^{(2)}$ in den betreffenden $\mathbf{V}^{(2)}$ liegen sollen, ist demnach unauflösbar. Diese Gleichung ist eine lineare Kombination der ursprünglichen Gleichungen, deren Koeffizienten gewisse Unterdeterminanten von A sind. $\left|\begin{smallmatrix} A^{(3)} \\ v^{(2)} \end{smallmatrix}\right|$ ist eine Linearform in den $v^{(2)}$

und durchläuft also nach 25 für $\mathfrak{v}^{(2)} \langle \mathbf{V}^{(2)}$ einen gewissen eindimensionalen Vorzeichenbereich $\mathbf{E}$.

Es ist mithin für die Unauflösbarkeit eines inhomogenen Systems von einem Rang $\geq k$ hinreichend und notwendig, dass mindestens eines der auf diese Weise gebildeten $\begin{vmatrix} A^{(3)} \\ c^{(2)} \end{vmatrix}$ nicht im betreffenden $\mathbf{E}$ liegt. Dies formulieren wir im Kombinationsprinzip:

Satz D 2. Aus jedem unauflösbaren System lässt sich durch lineare Kombination der Relationen ein von Unbekannten freier Widerspruch herleiten.

Ein solcher Widerspruch ist von der Form $\alpha < \alpha$ oder $\alpha \leq \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\alpha < \beta$, trotz wirklich geltendem $\alpha > \beta$.

70. *Definite Abhängigkeit.* Eine lineare Beziehung zwischen den Spalten einer Matrix, deren Koeffizienten durchweg gleiches Vorzeichen haben, aber nicht sämtlich Null sind, soll eine definite Abhängigkeit der Spalten (oder der Matrix) heissen (über definit und echt definit s. auch 15).

Nach der in 55 gegebenen Definition einer Simplexmatrix ist also eine Matrix A von i Zeilen und $i + 1$ Spalten dann eine Simplexmatrix, wenn zwischen ihren Spalten genau eine echt definite Abhängigkeit besteht; deren Koeffizienten sind dann den abwechselnd mit $+1$ und -1 multiplizierten Unterdeterminanten i-ter Ordnung von A proportional. Daraus sehen wir:

Satz B 1. Eine Matrix von i Zeilen und $i + 1$ Spalten ist dann und nur dann eine Simplexmatrix, wenn ihre $i + 1$ Unterdeterminanten i-ter Ordnung abwechselnd > 0 und < 0 sind.

Sei uns nun ein k.u.S. der Form $x A \langle \mathbf{V}_+$ von $r + 1$ echten homogenen Ungleichungen gegeben, wofür wir auch $x A > 0$ schreiben können. Da A nach Satz D 1 den Rang r hat, so besteht (bis auf einen willkürlichen Faktor) genau eine homogene lineare Beziehung zwischen den $r + 1$ Spalten; und da je r der Spalten linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten $\varkappa_i$ dieser Beziehung sämtlich $\neq 0$.

Andererseits muss sich nach Satz D 2 aus den Ungleichungen durch lineare Kombination ein von Unbekannten freier Widerspruch ableiten lassen; die Koeffizienten dieser Kombination sind also eben jene Koeffizienten $\varkappa_i$ der linearen Abhängigkeit, d.h.

den abwechselnd mit $+1$ und -1 multiplizierten Unterdeterminanten r-ter Ordnung aus irgend welchen r festen Zeilen von A proportional.

Nun ist ersichtlicherweise $\Sigma x_i \mathbf{E}_+$ mit $\mathbf{E}_0$ identisch, wenn alle $x_i = 0$ sind, gleich $\mathbf{E}_+$ oder $\mathbf{E}_-$, wenn alle $x_i \geq 0$ bzw. ≤ 0 und nicht alle $x_i = 0$ sind, und gleich $\mathbf{E}_{-0+}$ in allen übrigen Fällen. Weil $0 < \Sigma x_i \mathbf{E}_+$ ein Widerspruch sein soll, müssen die x_i, da nach dem oben Gesagten keines verschwindet, sämtlich positiv oder sämtlich negativ sein. Die Unterdeterminanten sind also abwechselnd positiv und negativ.

71. *Hauptkriterium.* Wir sehen daher, wenn wir jetzt statt eines k.u.S. irgend ein unauflösbares System $xA > 0$ betrachten:

Satz D 3. Ein System der Form $xA > 0$ ist dann und nur dann lösbar, wenn keine $i+1$ linear abhängigen Spalten aus A eine Simplexmatrix von i Zeilen und $i+1$ Spalten enthalten.

Für $i = 0$ soll das sinngemäss bedeuten, dass keine Spalte aus lauter Nullen vorkommen darf.

Wir können nun dieses Kriterium auch so formulieren:

Satz D 4. $xA > 0$ ist genau dann lösbar, wenn es zu jeder liegenden Simplexmatrix B aus A eine Zeile s gibt, für welche die Determinante $\begin{vmatrix} B \\ s \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Denn wären alle $\begin{vmatrix} B \\ s \end{vmatrix} = 0$, so hätten wir gerade den vorher verbotenen Fall vor uns.

Um dieses Kriterium auf eine Matrix A anzuwenden, brauchen wir also von ihren Unterdeterminanten (einschliesslich den Elementen) nur die Vorzeichen zu kennen.— Wir wollen nun einer Simplexmatrix von i Zeilen und $i+1$ Spalten dasjenige Vorzeichen beilegen, das die Unterdeterminante aus den ersten i Spalten hat.

72. *Korollar.* Hiernach können wir den Spezialfall untersuchen, dass die Koeffizientenmatrix die Form (E, A) hat, d.h., dass uns das System $xA > 0$, $x > 0$ vorliegt.

Hier hat jede Teilmatrix von (E, A), eventuell nach Umstellung ihrer Zeilen, die Form $B^* = \begin{pmatrix} E_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ oder eine "Teilform" hiervon, z.B. $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$; die letzteren Fälle lassen sich mit geringfügigen Abänderungen der allgemeinen Betrachtung subsumieren.

Wann ist nun $B^* = \begin{pmatrix} E_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ eine liegende Simplexmatrix? Es sei die Zeilenzahl von B^* gleich i; B hat dann $i-p$ Zeilen und $i-p+1$ Spalten. Lassen wir eine dieser $i-p+1$ Spalten fort, so nimmt die übrigbleibende Determinante den Wert einer Unterdeterminante höchster Ordnung von B an: wir sehen also, dass B selbst auf jeden Fall eine Simplexmatrix sein muss. Wenn wir gerade die letzte Spalte weglassen, sehen wir, dass $\mathrm{sg}B = \mathrm{sg}B^*$ sein muss.

Lassen wir aber eine der ersten p Spalten fort, etwa die k-te, und ist t_k die k-te Zeile von C, so ergibt sich eine Unterdeterminante $(-1)^{p-k}\begin{vmatrix} t_k \\ B \end{vmatrix}$ von B^*, die, wenn t_k zur letzten Zeile gemacht wird, den Wert $(-1)^{i-k}\begin{vmatrix} B \\ t_k \end{vmatrix}$ annimmt. Das Vorzeichen alterniert mit k, so dass auf jeden Fall das Vorzeichen der Determinante $\begin{vmatrix} B \\ t_k \end{vmatrix}$ von k unabhängig sein muss. Dieses Vorzeichen muss nun das entgegengesetzte von B sein; denn die Weglassung der p-ten Spalte aus B^* ergibt eine Determinante $\begin{vmatrix} t_p \\ B \end{vmatrix}$, deren Vorzeichen $(-1)^{i-p+1}\mathrm{sg}B^*$ sein muss, so dass

$$\mathrm{sg}\begin{vmatrix} B \\ t_p \end{vmatrix} = (-1)^{i-p}\mathrm{sg}\begin{vmatrix} t_p \\ B \end{vmatrix} = -\mathrm{sg}B$$

ist. Diese Bedingung ist offenbar auch hinreichend.

Es sei nun B eine solche liegende Simplexmatrix aus A, dass für keine in B nicht vorkommende Zeile s von A $\mathrm{sg}\begin{vmatrix} B \\ s \end{vmatrix} = \mathrm{sg}B$ gilt. Dann greifen wir alle s mit $\mathrm{sg}\begin{vmatrix} B \\ s \end{vmatrix} = -\mathrm{sg}B$ heraus, schreiben sie als eine p-zeilige Matrix C über B und fügen das Spaltensystem $\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix}$ hinzu, so dass wir eine Matrix B^* mit etwa i Zeilen und $i+1$ Spalten bekommen. Diese Matrix B^* ist nun nach dem oben Ausgeführten eine Simplexmatrix, und für jedes weitere s aus A ist $\begin{vmatrix} B^* \\ s \end{vmatrix} = 0$, so dass gerade der verbotene Fall des Satzes D 4 vorliegt. Somit ergibt sich:

Satz D5. Es ist $xA > 0$ genau dann durch positive Unbekannte $x > 0$ lösbar, wenn es für jede liegende Simplexmatrix B aus A eine Zeile s mit $\mathrm{sg}\begin{vmatrix} B \\ s \end{vmatrix} = \mathrm{sg}B$ gibt.

§ 13. Der Transpositionssatz.

73. *Seine Herleitung.* Wir haben (Satz D 2) gesehen, dass sich aus jedem unauflösbaren System durch Multiplikation der Relationen mit gewissen Faktoren (nämlich Unterdeterminanten) und Addition eine einzelne Gleichung ableiten lässt, die keine Unbekannten, aber einen Widerspruch enthält.

Nun lässt sich, nach Multiplikation gewisser Relationen mit —1, jedes homogene Relationensystem in der Form

VIII $\quad \Sigma: \quad xA > 0,\ xB \geq 0,\ xC = 0$

schreiben; die Identitäten sind dabei weggelassen. Zusammenfassend wird

$$x(A,B,C) \langle \mathbf{V} = \mathbf{V}_+ \cdot \mathbf{V}_{0+} \cdot \mathbf{V}_0,$$

wo die Dimensionen der drei Faktoren von $\mathbf{V}$ den Spaltenzahlen von A, B und C entsprechend gleich sind.

Der durch Kombination entstehende Widerspruch wird hier, da die Relationen homogen sind, von der Form sein

$$Ay_1 + By_2 + Cy_3 = 0, \qquad 0 \text{ nicht} \langle \Sigma\eta_1 \mathbf{E}_+ + \Sigma\eta_2 \mathbf{E}_{0+} + \Sigma\eta_3 \mathbf{E}_0,$$

wo z.B. η_1 die Koordinaten von y_1 durchläuft. $\Sigma\eta_1 \mathbf{E}_+ + \Sigma\eta_2 \mathbf{E}_{0+} + \Sigma\eta_3 \mathbf{E}_0$ ist also gleich $\mathbf{E}_+$ oder $\mathbf{E}_-$, und das ist nur der Fall, wenn mindestens ein $\eta_1 \neq 0$ ist und alle von Null verschiedenen η_1 und η_2 gleiches Vorzeichen haben, das als positiv angenommen werden kann.

Mit anderen Worten: wenn VIII unauflösbar ist, ist

$$\Sigma': \qquad (A,B,C)y = 0, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1 \neq 0$$

auflösbar; und auch das Umgekehrte ist der Fall: wenn VIII auflösbar ist, ist Σ' unauflösbar, da beide zusammen eben einen Widerspruch hervorbrächten. Wir wollen Σ' das zu Σ transponierte System nennen, da seine Koeffizientenmatrix bis auf einen trivialen Bestandteil zu derjenigen von Σ transponiert ist; dann gilt also der Transpositionssatz:

Satz D 6. Ein System Σ und sein transponiertes System Σ' sind in dem Sinne komplementär, dass sich stets genau eines von ihnen lösen lässt.

74. *Zeilenweise Deutung.* Geometrisch lässt sich der Transpositionssatz auf mehrere Arten deuten. Einerseits können wir nämlich entweder die Zeilen oder die Spalten der Koeffizientenmatrix als Punkte im Raume betrachten, und unabhängig davon können wir andererseits die Koordinaten der zu betrachtenden Raumpunkte statt cartesisch auch homogen nehmen.

Fassen wir zunächst die Zeilen der Koeffizientenmatrix (A,B,C) als Punkte auf; $x(A,B,C)$ durchläuft dann bei veränderlichem x alle linearen Kombinationen dieser Punkte, d. h. ein lineares Gebilde $\mathbf{X}$ durch den Nullpunkt. Jedes y, das den Gleichungen $(A,B,C)\,y = 0$ des transponierten Systems Σ' genügt, ist ein Punkt desselben Raumes, dessen Nullvektor auf $\mathbf{X}$ senkrecht steht; diese y bilden das im Nullpunkt zu $\mathbf{X}$ komplementäre senkrechte lineare Gebilde $\mathbf{Y}$. Wählen wir insbesondere $B = C = 0$, so sehen wir, dass die beiden Aussagen "$\mathbf{X}$ und $\mathbf{V}_+$ sind fremd" "$\mathbf{Y}$ und $\mathbf{V}_{0+}$ haben nur den Nullpunkt gemein" komplementäre Aussagen sind. Mit anderen Worten:

Satz G 1. Von je zwei orthogonalen komplementären linearen Gebilden durch den Anfangspunkt hat mindestens eines mit dem Hauptorthanten Punkte — ausser dem Nullpunkt — gemein, und höchstens eines hat mit dem Inneren des Hauptorthanten Punkte gemein.

Letzteres sieht man auch ohne weiteres direkt ein.

Jedes $y \neq 0$ in $\mathbf{V}_{0+}$ lässt sich also auch als Koordinatenvektor einer Hyperebene ansehen, auf der die Punkte von $\mathbf{X}$ liegen, und entsprechend bei Vertauschung von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$. So sehen wir:

Satz G 2. Jedes den Hauptorthanten, bezw. sein Inneres nicht schneidende lineare Gebilde liegt auf einer den Hauptorthanten, bezw. sein Inneres nicht schneidenden Hyperebene.

Zur Veranschaulichung hiervon ist zu bemerken, dass der Hauptorthant und das lineare Gebilde eine konvexe Menge erzeugen; die Hyperebene ist irgendeine der Stützhyperebenen durch das lineare Gebilde.

75. *Spaltenweise Deutung im* $\mathbf{R}_n$. Fassen wir nunmehr die Spalten von (A,B,C) als Punkte auf, so bedeutet $(A,B,C)y = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$ insbesondere für $B = C = 0$, dass der Nullpunkt im Innern oder auf dem Rande des durch die Spalten von A erzeugten konvexen Polyeders $\mathbf{P}$ liegt. Dafür können wir nach 70 auch sagen, dass die Spalten a von A definit abhängig sind.

$xA > 0$ bedeutet hier, dass x mit jeder Spalte a von A einen spitzen Winkel bildet, d. h., dass alle Spalten und also auch das ganze $\mathbf{P}$ auf einer Seite der im Nullpunkt auf x senkrechten Hyperebene liegen. Also ergibt sich, da wir jeden Punkt p zum Nullpunkt machen können:

Satz G 3. Durch jeden äusseren Punkt eines konvexen Polyeders lässt sich eine das Polyeder nicht treffende Hyperebene legen.

Dies gilt offenbar für allgemeine konvexe Mengen $\mathbf{A}$: man nimmt hierzu die in p auf $\overline{pq}$ senkrechte Hyperebene, wo q der zu p nächste Punkt der Hülle $\overline{\mathbf{A}}$ von $\mathbf{A}$ ist.

Den allgemeineren Satz:

Satz G 4. Durch jeden Randpunkt einer konvexen, abgeschlossenen Menge lässt sich eine Stützhyperebene legen.

den man auch durch Grenzübergang aus der zuletzt erwähnten Tatsache erhalten kann, werden wir in 78 geometrisch herleiten.

76. *Spaltenweise Deutung im* $\mathbf{R}_{n-1}$. Es seien endlich die Spalten von A homogene Punktkoordinaten im $\mathbf{R}_{n-1}$, und es werde $\xi_n = 0$, wo ξ_n die n-te Zahl aus der betreffenden Spalte bedeutet, als die unendlich ferne Hyperebene aufgefasst. Dann teilen wir die Matrix A in zwei Teilmatrizen A_+ und A_-. Dazu fassen wir jeweils die Spalten mit $\xi_n > 0$ und $\xi_n < 0$ (wir nehmen an, dass beides vorkommt) in einer Gruppe zusammen und verteilen die übrigen Spalten (wo $\xi_n = 0$ ist) beliebig auf beide Gruppen. Dementsprechend nimmt Σ' die Form

$$A_+ y_+ + A_- y_- = 0,\ y = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix},\ y \geq 0,\ y \neq 0$$

an. Es ist $y_+ \neq 0$, da aus $y_+ = 0$ auch $A_- y_- = 0$ und also, wenn man die letzte Koordinate des Produktes betrachtet, $y_- = 0$ folgen würde; ja, es ist sogar mindestens eine derjenigen Koordinaten von y_+ von Null verschieden, die zu solchen Spalten von A gehören, die auf eine von Null verschiedene Zahl enden.

Nun ist $A_+ y_+$ für $y_+ \geq 0$, $y_+ \neq 0$ irgend ein Punkt der von den Spalten von A_+ erzeugten konvexen Menge $\mathbf{K}_+$, die als Summe eines Polyeders und eines Strahlenbereiches zu denken und also unrund ist. Die Lösbarkeit von Σ' bedeutet demnach, dass $\mathbf{K}_+$ und $\mathbf{K}_-$ (entsprechend definiert) nicht fremd sind, nämlich den Punkt $A_+ y_+ = -A_- y_-$ gemein haben.

x mit $xA > 0$ stellt hier die Koordinaten einer Hyperebene dar, die, wie man leicht sieht, $\mathbf{K}_+$ von $\mathbf{K}_-$ trennt. So ergibt hier der Transpositionssatz:

Satz G 5. Zwei fremde unrunde Mengen lassen sich durch eine Hyperebene trennen, von der beide positiven Abstand haben.

Bei beschränkten Mengen (die dann nicht notwendig unrund, sondern nur abgeschlossen konvex sein müssen) [1]) hätte man als solche Hyperebene einfach die Mittellot-Hyperebene von p und q, zwei nächstgelegenen Punkten von $\mathbf{K}_+$ bezw. $\mathbf{K}_-$, wählen können.

77. *Existenz der Trennhyperebene.* Um dagegen den soeben angegebenen Satz allgemein für konvexe abgeschlossene Mengen, die voneinander positiven Abstand haben, zu beweisen, braucht man die Tatsache, dass zwei konvexe abgeschlossene Mengen ohne gemeinsame innere Punkte sich (abgesehen von Randpunkten) durch eine Hyperebene trennen lassen; man trennt dann demgemäss ihre sog. ε-Umgebungen.

Diese letztere Tatsache aber können wir folgendermassen erhärten.

Seien die beiden gegebenen Mengen $\overline{\mathbf{A}}$ und $\overline{\mathbf{B}}$ im $\mathbf{R}_{n-1}$ gelegen, und sei $\mathbf{A}$ bezw. $\mathbf{B}$ das Innere von $\overline{\mathbf{A}}$ bezw. $\overline{\mathbf{B}}$; dann fassen wir diesen $\mathbf{R}_{n-1}$ als Hyperebene $\mathbf{H}$ im $\mathbf{R}_n$ auf. Wir wählen einen nicht auf $\mathbf{H}$ gelegenen Punkt p im $\mathbf{R}_n$ und erhalten durch Spiegelung an ihm aus $\mathbf{B}$ eine kongruente Menge $\mathbf{B}^*$, die auf einer zu $\mathbf{H}$ parallelen Hyperebene $\mathbf{H}^*$ liegt.

Nun behaupte ich zunächst: die Vereinigungsmenge $\mathbf{C}$ der Strecken, die von Punkten von $\mathbf{A}$ zu Punkten von $\mathbf{B}^*$ führen, ist konvex. Seien nämlich z_1 und z_2 zwei Punkte von $\mathbf{C}$, und sei z_1 ein Punkt der Strecke von x_1 bis y_1, ebenso sei z_2 zwischen x_2 und y_2 gelegen, $x_1, x_2 \langle \mathbf{A}$, $y_1, y_2 \langle \mathbf{B}^*$. Es sei also

$$z_1 = \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1, \quad \lambda_1, \mu_1 > 0, \ \lambda_1 + \mu_1 = 1$$
$$z_2 = \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2, \quad \lambda_2, \mu_2 > 0, \ \lambda_2 + \mu_2 = 1 \ .$$

Dann wird bei beliebigem λ und μ mit $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$ auch

$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2)\left(\frac{\lambda\lambda_1}{\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2} x_1 + \frac{\mu\lambda_2}{\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2} x_2\right) +$$
$$+ (\lambda\mu_1 + \mu\mu_2)\left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda\mu_1 + \mu\mu_2} y_1 + \frac{\mu\mu_2}{\lambda\mu_1 + \mu\mu_2} y_2\right),$$

$\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 + \lambda\mu_1 + \mu\mu_2 = 1.$

Geometrisch handelt es sich um die Aufspannung des Tetraeders (oder Dreiecks) $\{x_1 y_1 x_2 y_2.\}$

Nun gehört p gewiss nicht zu $\mathbf{C}$, da sonst $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gemeinsame Spiegelpunkte hätten. Dagegen gehört p eventuell zur Hülle $\overline{\mathbf{C}}$ von $\mathbf{C}$ und sicher zum Rand des Strahlenbereiches

---

[1]) Für diesen Fall wurde der obige Satz von Minkowski ausgesprochen. — Es braucht nur eine der beiden Mengen beschränkt zu sein.

$\overline{p\mathfrak{C}}$. Legen wir jetzt nach 78 eine Stützhyperebene $\mathfrak{H}_1$ durch p an $\overline{p\mathfrak{C}}$, so trennt $\mathfrak{H}_1$ und demnach auch der Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_1$ die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$. Dieser Durchschnitt ist aber eine Hyperebene im $\mathfrak{R}_{n-1}$.

Analog wie in 75 hätte man den Beweis auch etwa so führen können: man bilde zu jeder der beiden Mengen eine ähnlich gelegene, in ihr enthaltene Menge, trenne diese Mengen nach 76 durch eine Hyperebene und lasse die inneren Mengen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konvergieren; dann strebt die Hyperebene mindestens einer Grenzlage zu, die nun, wie man zeigen kann, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ trennen muss.

78. *Existenz der Stützhyperebene.* Satz G 4 ist im $\mathfrak{R}_1$ trivial und im $\mathfrak{R}_2$ leicht herleitbar, indem man einen Halbstrahl sich um den gegebenen Punkt 0 drehen lässt. Sei der Satz im $\mathfrak{R}_n$ zu beweisen, $n > 2$, und für kleineres n gültig.

Wir legen durch $0 = 0_n$ eine Hyperebene $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}$ schneide die gegebene Menge $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_1$ (auch $\mathfrak{K}_1$ ist konvex). Enthält $\mathfrak{K}_1$ 0 im Innern, so hat $\mathfrak{H}$ bereits die verlangte Eigenschaft: denn man sieht leicht ein, dass, wenn auf beiden Seiten von $\mathfrak{H}$ Punkte von $\mathfrak{K}$ lägen, 0 auch — gegen die Voraussetzung — in dessen Innern sein müsste.

Es möge also 0 auf dem Rande von $\mathfrak{K}_1$ liegen: dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung in $\mathfrak{H}$ ein $(n-2)$-dimensionales lineares Gebilde $\mathfrak{H}_1$, so dass $\mathfrak{K}_1$ ganz zu einer Seite von $\mathfrak{H}_1$ oder auf $\mathfrak{H}_1$ selbst liegt. Es sei nun in 0 auf $\mathfrak{H}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ senkrecht und in $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_1$ die Gerade $\mathfrak{G}_1$ senkrecht. Dann projizieren wir $\mathfrak{K}$ auf die Ebene $\mathfrak{E} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1)$ und erhalten eine neue konvexe Menge $\mathfrak{K}_2$.

Auch hier ist 0 ein Randpunkt, da die Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{E}$ — $\mathfrak{H}_1$ projiziert sich als 0 — einen von $\mathfrak{K}_2$ freien Halbstrahl liefert; daher hat $\mathfrak{K}_2$ in 0 eine Stützgerade $\mathfrak{G}_2$. Es ist, da $\mathfrak{E}$ senkrecht auf $\mathfrak{H}_1$ ist, auch $\mathfrak{G}_2$ senkrecht auf $\mathfrak{H}_1$. $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{H}_1$ erzeugen eine Hyperebene $\mathfrak{H}$, die die verlangte Eigenschaft hat; denn $\mathfrak{H}_2$ projiziert sich auf $\mathfrak{E}$ als $\mathfrak{G}_2$ und muss daher Stützhyperebene von $\mathfrak{K}$ sein.

79. *Vollständig signierte Matrizen.* Nach Satz G 4 ist der Nullpunkt dann und nur dann im Innern der durch eine gegebene Menge $\mathfrak{A}$ erzeugten konvexen Menge enthalten, wenn auf beiden Seiten

jeder Hyperebene durch den Nullpunkt Punkte von **A** liegen. Dies benutzte Kakeya gelegentlich als Definition der konvexen Erzeugung.

Jede Hyperebene $xa = \alpha$, die nicht durch den Nullpunkt geht — $\alpha \neq 0$ — und keiner Achse parallel ist — alle Koordinaten von a sind $\neq 0$ — schneidet einen einzigen Orthanten gar nicht. Demnach gibt es konvexe Punktmengen, die im Innern jedes Orthanten, ausser einem, Punkte haben, und in deren Innern — ja sogar auf deren Rand — der Nullpunkt nicht liegt.

Soll dagegen ein konvexe Menge **A** im Innern eines jeden Orthanten, ohne Ausnahme, Punkte haben, so liegt der Nullpunkt sicher in ihrem Innern. Um das einzusehen, betrachte man alle Punkte von **A** mit positiver erster Koordinate ξ_1; hierzu gehört (wenn wir Induktion in Bezug auf die Dimensionenzahl n benutzen) ein Punkt auf der positiven ξ_1 - Achse. Ebenso haben wir einen weiteren Punkt auf der negativen ξ_1 - Achse, womit wir fertig sind.

Ist **A** ein Polyeder, so nennt man die entsprechende erzeugende Matrix A nach Dines: vollständig signiert (jede Vorzeichenkombination kommt vor). Der Lösungsbereich **L** von $xA \geq 0$ ist dann, wie man auch unmittelbar sieht, gleich 0. Fehlt auch nur ein einziger Orthant, so braucht das nicht mehr der Fall zu sein (man nehme für ein x mit lauter von Null verschiedenen Koordinaten genügend viele a mit $xa = 1$, wie oben angedeutet)

§ 14. Der Simplexsatz.

80. *Formulierung und erster Beweis.* Ein kleinstes System A von definit abhängigen Spalten, deren Anzahl $r+1$ sei, gehört nach dem Transpositionssatz zu einem kleinsten unauflösbaren System $xA > 0$; nach 70 ist dann der Rang von A gleich r, und A enthält eine Simplexmatrix von Range r, was zusammen auch hinreicht. Wir sehen:

Satz D 7. Der Rang eines kleinsten Systems definit abhängiger Spalten ist um eins kleiner als ihre Anzahl.

Nun bestimmen die Punkte, die zu $r+1$ solchen Spalten gehören, ein Simplex auf dem durch A und damit durch eine jede A umfassende Matrix vom Range r erzeugten linearen Gebilde. Hiernach enthält also die durch die Punkte der Matrix erzeugte konvexe Menge den Nullpunkt genau dann, wenn schon ein solches Simplex den Nullpunkt enthält. Wir erhalten so den bekannten Fundamentalsatz der Theorie der konvexen Mengen,

aus dem, wie man leicht sieht, auch umgekehrt Satz D 7 folgt:

Satz F 4. Die durch eine gegebene Menge erzeugte konvexe Menge ist die Vereinigungsmenge aller Simplizes, deren Ecken sämtlich der gegebenen Menge angehören.

Diesen Satz, sowie sein vorher formuliertes analytisches Korrelat, werden wir den Simplexsatz nennen. Bevor wir auf die aus ihm zu ziehenden Folgerungen genauer eingehen, geben wir noch einen unmittelbaren Beweis an.

81. *Zweiter Beweis.* Wir beweisen die analytische Formulierung.— Aus der definiten folgt die lineare Abhängigkeit: also ist der Rang kleiner als die Anzahl der Spalten. Unser Satz läuft nun auf die Behauptung hinaus, dass (bis auf einen konstanten Faktor) nur eine einzige lineare Abhängigkeit zwischen den Spalten besteht. Ein Hilbertscher Gedanke zeigt aber, dass die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führt.

Die Koeffizienten der gegebenen definiten Abhängigkeit sind, da es sich um ein kleinstes System handelt, von Null verschieden, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie sämtlich gleich eins sind. Es gilt also $\Sigma a = 0$, wo a alle Spalten von A durchläuft.

Wenn nun eine weitere homogene lineare Relation $\Sigma\lambda a = 0$ vorliegt, so dividieren wir diese Relation durch eines derjenigen λ, die absolut genommen am grössten sind. Ziehen wir sie jetzt von $\Sigma a = 0$ ab, so bleibt eine definite Relation übrig, die nicht mehr alle Spalten enthält und deren Koeffizienten mithin sämtlich verschwinden müssen. Daher kann sich $\Sigma\lambda a = 0$ von $\Sigma a = 0$ nur um einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden.

82. *Weitere Deutung.* Der Simplexsatz lässt sich noch auf andere als die angegebene Art geometrisch deuten. Wir fassen zu diesem Zwecke die Spaltenelemente als homogene Punktkoordinaten auf, so dass Spalten, deren letztes Element Null ist, als unendlich ferne Punkte anzusehen sind; solche Punkte sollen nicht vorkommen.

Dann unterscheiden wir Spalten $\binom{a}{\alpha}$ mit $\alpha > 0$ und solche $\binom{b}{-\beta}$ mit $\beta > 0$; eine Relation, die die definite Abhängigkeit ausdrückt, lässt sich jetzt auf die Form

$$\Sigma\lambda\binom{a}{\alpha} = -\Sigma\mu\binom{+b}{-\beta},\quad \lambda, \mu \geq 0,\quad \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$$

bringen. Die zwei Teilmatrizen stellen zwei Polyeder dar, deren Fremdsein durch die Nichtexistenz einer solchen Relation angezeigt wird. So ergibt Satz 65 hier den Satz:

Satz F 5. Die Summe der Eckenzahlen zweier kleinster nicht ausserhalb voneinander liegender konvexer Polyeder ist um zwei grösser als die Dimension des von beiden zusammen erzeugten linearen Gebildes.

Hier bedeutet kleinst, dass, nach Wegnahme auch nur einer Ecke, die durch die übrigen Ecken erzeugten Polyeder ganz ausserhalb voneinander liegen.

83. *Unabhängige Punkte.* Wir wollen uns jetzt fragen, was die Begriffe des ersten Abschnittes von § 3 ergeben, wenn man sie auf die Eigenschaft einer Punktmenge, konvex zu sein, anwendet.

Eine endliche Punktmenge A erzeugt ein Polyeder $\overline{A}$. Um zu einer beliebigen Punktmenge $\mathbf{A}$ die kleinste sie enthaltende konvexe Menge $\overline{\mathbf{A}}$ zu finden, bilde man zu jedem endlichen Teil A von $\mathbf{A}$ das Polyeder $\overline{A}$ und sodann die Vereinigungsmenge $\mathbf{B}$ all dieser $\overline{A}$.

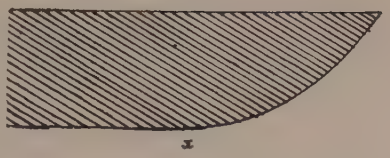
In der Tat muss $\overline{\mathbf{A}}$ offenbar $\mathbf{B}$ enthalten, und es genügt also zu zeigen, dass $\mathbf{B}$ konvex ist. Ist nun $x \langle \mathbf{B}$ und $y \langle \mathbf{B}$, so haben wir auch $x \langle \overline{A}$ und $y \langle \overline{B}$ für gewisse endliche Teile A und B von $\mathbf{A}$, so dass auch $\overline{C}$ in $\mathbf{B}$ enthalten sein muss, wo C die Vereinigungsmenge von A und B bezeichnet: zu $\overline{C}$ gehört aber auch jeder Punkt der Strecke von x bis y.

Hiermit ist auch der Simplexsatz für beliebige, nicht endliche Mengen vollständig bewiesen. Nun kann man, nach dem Simplexsatz, durch endlich oft (im $\mathbf{R}_n$ höchstens $n-1$ Mal) wiederholte Bildung von Strecken zwischen schon vorher gebildeten Endpunkten von den Punkten von A zu jedem Punkt von $\overline{A}$ gelangen, also auch von den Punkten von $\mathbf{A}$ zu jedem Punkt von $\overline{\mathbf{A}}$. Daher gilt:

Satz F 6. Ist ein Punkt x einer konvexen Menge unabhängig, soll also $\mathbf{A}-x$ auch schon konvex sein, so genügt dazu, dass x auf keiner Strecke mit Endpunkten aus $\mathbf{A}-x$ liegt, was natürlich notwendig ist.

Jede Gerade durch x hat also in höchstens einer Richtung, von x aus gesehen, Punkte mit $\mathbf{A}$ gemein. Daher muss x ein Randpunkt von $\mathbf{A}$ sein.

84. *Einpunktige Stützhyperebenen.* Man kann daher durch jeden unabhängigen Punkt eine Stützhyperebene legen; jedoch kann man, selbst wenn man sich auf abgeschlossene Mengen beschränkt, nicht notwendig erreichen, dass diese Stützhyperebene keinen weiteren Punkt mit der Menge gemein hat (s. d. Fig.). Eine solche Hyperebene nennen wir einpunktig [1]). Man kann das aber in zwei besonderen Fällen erreichen: wenn die Menge ein abgeschlossener Strahlenbereich und wenn sie ein Polyeder ist.



Soll zunächst x ein unabhängiger Punkt des abgeschlossenen Strahlenbereichs $\mathbf{A}$ sein, so muss erstens x ein Zentrum von $\mathbf{A}$ und zweitens $\mathbf{A}$ geradenfrei sein und also nur ein einziges Zentrum haben; und umgekehrt ist das Zentrum jedes geradenfreien, abgeschlossenen Strahlenbereichs ein unabhängiger Punkt desselben.

Dann können wir die in 78 aufgeführten Überlegungen wiederholen: wie dort ist unsere jetzige Behauptung, dass sich durch x sogar eine Stützhyperebene finden lässt, die keinen weiteren Punkt mit $\mathbf{A}$ gemein hat, im $\mathbf{R}_1$ trivial und im $\mathbf{R}_2$ leicht herleitbar, so dass wir wieder Induktion benutzen können.

Die willkürliche Hyperebene $\mathbf{H}$ durch x schneidet hier $\mathbf{A}$ (wenn überhaupt) in einem geradenfreien, abgeschlossenen Strahlenbereich $\mathbf{A}_1$ mit dem Zentrum x, so dass jetzt keine Fallunterscheidung nötig ist. Wir definieren $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{E}$ ganz wie in 78 und $\mathbf{A}_2$ als senkrechte Projektion von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{E}$.

Dann ist $\mathbf{A}_2$ ebenfalls ein abgeschlossener geradenfreier Strahlenbereich, also ein Winkel, der ≥ 0 und $< \pi$ ist und eine Stützgerade $\mathbf{G}_2$ hat, die mit ihm nur den Punkt x gemein hat. $\mathbf{G}_2$ und $\mathbf{H}_1$ erzeugen wieder die gesuchte Stützhyperebene $\mathbf{H}_2$.

Denn, da die Projektion von $\mathbf{H}_2$ auf $\mathbf{E}$ eben $\mathbf{G}_2$ ist, müsste ein Punkt von $\mathbf{A}$, der auf $\mathbf{H}_2$ läge, auf $\mathbf{E}$ die Projektion x haben; er müsste also auf $\mathbf{H}_1$ liegen, was aber durch die Wahl von $\mathbf{H}_1$ ausgeschlossen wurde.

85. *Reduktion unbeschränkter Menge auf beschränkte.* Ist nun die Menge $\mathbf{A}$, für die wir die Existenz einpunktiger Hyperebenen beweisen wollen, ein Polyeder, so pflegt man

---

[1]) Minkowski nennt diese Hyperebenen Eckstützebenen, die unabhängigen Punkte extreme Punkte.

die unabhängigen Punkte "Ecken" zu nennen. Wir haben als x-Ecke den ganzen Strahlenbereich $\overline{x\mathbf{A}}$ definiert und gezeigt, dass $\overline{x\mathbf{A}}$ von den x enthaltenden Hyperebenen (Seiten von $\mathbf{A}$) begrenzt ist. Ist also x unabhängig, so ist $\overline{x\mathbf{A}}$ geradenfrei, so dass wir aus 84 die Existenz einer Stützhyperebene ersehen, die mit $\overline{x\mathbf{A}}$ und also auch mit $\mathbf{A}$ nur den Punkt x gemein hat. Damit ist der Existenzbeweis der einpunktigen Hyperebene in den beiden oben angegebenen Fällen erbracht.—

Wir betrachten nun wieder einen abgeschlossenen Strahlenbereich und eine der in 84 aufgewiesenen einpunktigen Hyperebenen durch sein Zentrum. Der Strahlenbereich schneidet jede zu der einpunktigen Hyperebene parallele Hyperebene, wenn überhaupt, in einer beschränkten Menge; denn andernfalls würden die Halbstrahlen, die vom Zentrum zu einer ins Unendliche gehenden Punktfolge des Schnittes führen, mindestens einen, notwendigerweise auf der einpunktigen Hyperebene gelegenen Grenzstrahl besitzen müssen. Mithin gilt:

Satz F 7. Ein geradenfreier, abgeschlossener Strahlenbereich lässt sich stets durch Strahlenbereichbildung ("Zentralprojektion") aus einer beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Menge erzeugen.

Daraus und aus der Anmerkung zu 59 folgt, dass jede konvexe, abgeschlossene Menge als Zentralprojektion der Summe einer linearen und einer beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Menge aufgefasst werden kann.

Die abgeschlossenen, unrunden Mengen $\mathbf{A}$ haben wir in 59 in ein lineares Gebilde $\mathbf{A}_1$, ein Polyeder $\mathbf{A}_2$ und einen Strahlenbereich $\mathbf{A}_3$ zerlegt. Verbinden wir die Summe $\mathbf{A}_4$ von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{A}_3$, die ja geradenfrei ist, mit einem Punkt, der nicht auf dem durch $\mathbf{A}_4$ erzeugten linearen Gebilde liegt, so erhalten wir einen unrunden Strahlenbereich $\mathbf{A}_5$, der sich nach Satz F 7 durch Zentralprojektion einer beschränkten Menge, also eines Polyeders $\mathbf{A}_6$ erzeugen lässt. Wir sehen also:

Satz F 8. Jede abgeschlossene, unrunde Menge lässt sich aus einem Polyeder durch Strahlenbereichbildung, Schnitt mit einer Hyperebene und Addition eines linearen Gebildes herstellen.

86. *Schrittweise Auflösung.* Die allgemeine explizite Auflösungsmethode für lineare Ungleichungssysteme mittels der Basis B im § 8 scheint, wie sich ja schon im Falle von line-

aren Gleichungen herausstellt, wegen der Notwendigkeit, Determinanten höherer Ordnung auszurechnen, nur für die einfachsten Spezialfälle der Praxis brauchbar. Sie lässt sich aber durch eine leichtere, schrittweise Auflösung ersetzen.

Wir schreiben die Unbekanntenzeilen, indem wir die Unbekannten irgendwie in zwei Gruppen teilen, in der Form (x,y) und entsprechend die Koeffizientenmatrix als $\binom{A}{B}$. Es sei also $(x,y)\binom{A}{B} = v \langle \mathbf{V}$, d.h. $xA+yB = v$ zu lösen. Wir multiplizieren dieses System rechtsseitig mit einem $G'(A') = G_1$, so dass $AG_1 = 0$ ist, und erhalten $yBG_1 = vG_1$. Hat G_1 etwa k Spalten und ist g_1 eine Spalte von G_1, so ist $\mathbf{V}g_1$ ein eindimensionaler Vorzeichenbereich $\mathbf{E}g_1$. Das Produkt der eindimensionalen Vorzeichenbereiche $\mathbf{E}g_1$ für alle Spalten g_1 von G_1 (für die Bezeichnung vergl. 26) sei der k-dimensionale Vorzeichenbereich $\mathbf{W}$. Dann muss yBG_1 in $\mathbf{W}$ liegen. Wir behaupten nun, dass es für jedes y mit $yBG_1 \langle \mathbf{V}$ ein x gibt, so dass $(x,y)\binom{A}{B} = v$ ist.

Das letztere System kann nämlich als inhomogenes System in x allein ($xA = v - yB$) aufgefasst werden; mithin kann es nach Satz D 2 nur dann unauflösbar sein, wenn bereits eine gewisse von x freie Kombination einen Widerspruch ergibt. Es soll also für eine gewisse Spalte p das Produkt $Ap = 0$ sein, während $vp - yBp = 0$, d. h. $yBp = vp$, nie gelten soll. Aus $Ap = 0$ folgt, dass p für geeignetes p_1 die Form G_1p_1 hat; aber $yBG_1p_1 = vG_1p_1$ lässt sich nach Voraussetzung lösen, so dass dennoch das ganze System auflösbar sein muss.

Mit Hilfe dieser Methode können wir also zuerst nach einem Teilsystem y und darauf nach den übrigen Unbekannten auflösen. Wird y als einzelne Unbekannte gewählt, so erhalten wir eine einfache, schrittweise Elimination, die in der Literatur gewöhnlich Reduktion genannt wird. (Hierzu kann man gerade das in § 6 vorkommende L_1 als G_1 benutzen.) Dass die Reduktion in einer Matrixmultiplikation besteht, konnte jedoch nicht zutage treten, solange die Identitäten nicht in die Betrachtung einbezogen wurden.

87. *Anderer Beweis des Transpositionssatzes.* Mit Hilfe der soeben erklärten Reduktion lässt sich der Transpositionssatz auch

unmittelbar beweisen, ohne vom Kombinationsprinzip Gebrauch zu machen.

Wir beschränken uns wieder auf den Fall $B = C = 0$. Wir wollen also zeigen, dass von den beiden Systemen Σ: $xA > 0$ und

Σ': $\quad Ay = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0$

des § 13 stets eines lösbar ist. Dass nicht beide zugleich lösbar sein können, sieht man, wie folgt, unmittelbar ein: bildet man den Ausdruck xAy, so müsste er erstens, da man ihn als $xA \cdot y$ schreiben kann, positiv sein, andererseits wegen $Ay = 0$ verschwinden.

Möge nun der Satz für ein A mit weniger Zeilen schon gelten (für den Fall einer einzelnen Zeile ist der Satz trivial: es handelt sich darum, ob die Zeile echt definit ist oder nicht).

Zunächst unterscheiden wir die Spalten von A nach dem Vorzeichen ihrer letzten Koordinate. Je nachdem, ob diese Zahl positiv, negativ oder Null ist, wollen wir die Relationen von Σ P_1-, P_2- bezw. P_3-Ungleichungen nennen.

Nun lassen wir in $xa > 0$ die P_3-Ungleichungen unverändert und ersetzen die übrigen durch $\xi_n > \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-\alpha_{ik}}{\alpha_{nk}} \xi_i\right)$ bezw. $\xi_n < \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_{il}}{\alpha_{nl}} \xi_i\right)$, wo α_{ik} die Elemente von A und ξ_i die Koordinaten von x seien, wodurch die Lösbarkeit nicht berührt wird. Aus diesen Ungleichungen folgt für jedes Paar aus einer P_1- und einer P_2-Ungleichung

$$(1) \qquad \Sigma\left(\frac{-\alpha_{ik}}{\alpha_{nk}} \xi_i\right) < \Sigma\left(\frac{-\alpha_{il}}{\alpha_{nl}} \xi_i\right)$$

d.h. (nach i geordnet), wegen $\alpha_{nk}\alpha_{nl} < 0$,

$$(2) \qquad \Sigma \begin{vmatrix} \alpha_{nk} & \alpha_{nl} \\ \alpha_{ik} & \alpha_{il} \end{vmatrix} \xi_i > 0$$

und sie lassen sich auch hierdurch ersetzen, weil die durch (1) festgelegten offenen Intervalle offenbar wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben müssen.

Das neue System (2) von Ungleichungen sei Σ_1: $xB > 0$; es enthält die letzte Unbekannte ξ_n nicht mehr. Wenn es in Σ nur P_1- oder nur P_2-Ungleichungen gibt, so fällt das System Σ_1 ganz weg; man braucht dann in der Tat (bei im übrigen beliebigem x) nur die letzte Koordinate absolut genügend gross zu wählen, d.h. das System Σ ist dann stets lösbar.

Im allgemeinen Fall wird es genügen, festzustellen, dass $By = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0$ ist, falls $Ay = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0$ unlösbar ist, da wir die Behauptung als für eine geringere Anzahl der Dimensio-

nen von x gültig vorausgesetzt haben. Wäre aber $By=0$, $y\geq 0$, $y\neq 0$ lösbar, so hätten wir für $i=1, 2,\ldots,n-1$, und trivialerweise auch für $i=n$

$$\sum_{k,l}\begin{vmatrix}\alpha_{nk} & \alpha_{nl}\\ \alpha_{ik} & \alpha_{il}\end{vmatrix}\eta_{kl}+\Sigma\alpha_{im}\eta_m=0$$

wo η die Komponenten von y und α_{im} die Koeffizienten α aus den P_3-Ungleichungen sind, oder

$$\sum_k\alpha_{ik}\Big(-\sum_l\alpha_{ln}\eta_{kl}\Big)+\sum_l\alpha_{il}\Big(\sum_k\alpha_{nk}\eta_{kl}\Big)+\sum_m\alpha_{im}\eta_m=0$$

d.h., das System Σ' wäre lösbar, da die Variabeln hierin doch wieder ≥ 0, aber nicht sämtlich gleich Null sind, weil sonst alle η_{kl} und η_m verschwinden müssten.

KAPITEL IV. VARIATIONSVERMINDERNDE MATRIZEN.

§ 15. Zeilendefinite Matrizen.

88. *Vorbemerkungen.* Wir verlassen jetzt unser Hauptthema und wenden uns einem speziellen Fall von Ungleichungssystemen zu. In der Einleitung haben wir das Problem erwähnt, alle sog. variationsvermindernden Matrizen aufzufinden, d.h. diejenigen Matrizen A, für die $xA=y$ höchstens soviel Zeichenwechsel aufweist wie x, bei beliebig gewähltem x. (Variations-nichtvermehrend wäre also eine genauere Bezeichnung.) Mit anderen Worten: es sind gewisse Simultankombinationen von Vorzeichen für die Koordinaten von x und y verboten und die entsprechenden Ungleichungssysteme unlösbar. Hier wird sich jedoch anstatt der im Hauptteil angegebenen, allgemeinen Methode zur Entscheidung der Lösbarkeitsfragen ein kürzerer Weg als gangbar erweisen.

Vorbereitend erwähnen wir zwei Sätze aus der Determinantentheorie, deren Beweis man z.B. bei Cesàro, Algebraische Analysis, 1. Aufl., S. 22 und S. 29, findet.

Es bedeute, wie stets weiterhin, $A^{(i)}$ die aus den $\binom{m}{i}\binom{n}{i}$ Unterdeterminanten i-ter Ordnung von A bestehende Matrix. Die Anordnung der Unterdeterminanten geschieht, wie üblich, lexikographisch in bezug auf die Zeilen- und Spaltenindizes. Z.B. ist $A^{(1)}=A$. Dann gilt allgemein:

Satz A 3. $A^{(i)}B^{(i)}=(AB)^{(i)}$.

Satz A 4. Wenn r der Rang von A ist, so hat $A^{(r)}$ den Rang eins, d. h. $A^{(r)}$ besteht aus lauter untereinander proportionalen Zeilen.

89. *A_i-Ketten.* Weiter werden wir zwei Bemerkungen über Teilmatrizen benutzen. Es möge wieder A_i eine Teilmatrix von A bedeuten, die aus i linear unabhängigen Spalten von A besteht. Wenn i kleiner als der Rang r der Matrix A ist, so können zwei A_i ein und demselben A_{i+1} angehören: in diesem Falle wollen wir sie benachbart nennen. Dagegen nennen wir zwei A_r benachbart, wenn sie ein A_{r-1} gemein haben. Wir zeigen nun:

Satz A 5. Wenn B und C zwei beliebige A_i bezeichnen, kann man durch genügend oft wiederholten Übergang zu einer benachbarten Matrix von B zu C gelangen.

Es möge nämlich B mit C genau $i-h$ Spalten gemein haben, die also ein A_{i-h} bilden, $0 \leq h \leq i \leq r$. Für $h = 0$ ist der Satz trivial. Daher können wir Induktion in bezug auf h benutzen. Wir unterscheiden drei Fälle.

Wenn erstens die Spalten von B und C zusammengenommen nur den Rang $i < r$ haben, so gibt es ausserhalb B und C eine von B und C unabhängige Spalte s. Es sei $B^{(1)}$ eine Matrix, die entsteht, wenn wir in B eine nicht zu C gehörige Spalte durch s ersetzen, entsprechendes bedeute $C^{(1)}$. Dann ist B zu $B^{(1)}$ und C zu $C^{(1)}$ benachbart, und $B^{(1)}$ und $C^{(1)}$ haben ein $A_{i-(h-1)}$ gemein, sind also nach Induktionsvoraussetzung verbindbar.

Haben zweitens B und C zusammen einen Rang $> i$, dann gibt es in C eine von B unabhängige Spalte s. Wir bilden ein $B^{(1)}$, wie oben. B ist mit $B^{(1)}$ benachbart, und $B^{(1)}$ und C haben ein $A_{i-(h-1)}$ gemein.

Sind endlich drittens B und C zusammen vom Range $i = r$, dann streichen wir zunächst in B eine beliebige, nicht zu C gehörige Spalte; die übrigbleibenden Spalten von B sind dann unabhängig und bilden ein A_{r-1}. Die Matrix, die aus denjenigen Spalten besteht, die in diesem A_{r-1} oder in C vorkommen, hat natürlich den Rang r und enthält also eine Spalte s, die von den Spalten des A_{r-1} nicht abhängt. s bildet mithin, zusammen mit den Spalten des A_{r-1}, ein neues A_r $B^{(1)}$. $B^{(1)}$ und B sind benachbart und $B^{(1)}$ und C haben ein $A_{r-(h-1)}$ gemein.

90. *A_{ii}-Ketten.* Es möge weiter A_{ii} eine quadratische Teilmatrix i-ter Ordnung von A bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet. Hier werden wir zwei A_{ii}, $i < r$, als benachbart bezeichnen, wenn sie ein und demselben $A_{i+1,\,i+1}$ angehören; dagegen sollen zwei A_{rr} benachbart heissen, wenn sie

sich voneinander nur in einer Spalte oder nur in einer Zeile unterscheiden. Auch jetzt können wir zeigen:

Satz A 6. Zwei beliebige A_{ii} lassen sich durch eine Kette von aufeinanderfolgenden benachbarten A_{ii} verbinden.

Es seien nämlich B und C die beiden vorgegebenen A_{ii} und es bedeute $\overline{B}$ bezw. $\overline{C}$ das von denjenigen Spalten von A, in denen B bezw. C liegt, gebildete A_i. $\overline{B}$ und $\overline{C}$ verbinden wir durch eine A_i-Kette der obenerwähnten Art. Aus jedem dieser eingeschobenen A_i wählen wir ein A_{ii}. Je zwei aufeinanderfolgende A_{ii} $B^{(1)}$ und $C^{(1)}$ haben nunmehr $i+1$ Spalten gemein, die eine Teilmatrix D von A bilden. (Für $i < r$ ist D ein A_{i+1}.) Die Zeilen von D, in denen $B^{(1)}$ liegt, bilden eine Teilmatrix $\overline{B}^{(1)}$; entsprechend definieren wir $\overline{C}^{(1)}$. $\overline{B}^{(1)}$ und $\overline{C}^{(1)}$ verbinden wir wieder durch eine Kette, diesmal jedoch von Teilmatrizen, die aus Zeilen von D bestehen. In jeder dieser Teilmatrizen wählen wir schliesslich ein A_{ii}, womit wir für $i < r$ fertig sind; denn je zwei aufeinanderfolgende A_{ii} liegen jetzt in einem $A_{i+1,i+1}$, und B und C sind durch die erweiterte Kette aus all diesen A_{ii} miteinander verbunden.

Für $i = r$ aber seien D_1 und D_2 zwei solche der eben gefundenen aufeinanderfolgenden A_{rr}, die sich tatsächlich in genau einer Zeile und genau einer Spalte unterscheiden. Es möge D_{12} die den Zeilen von D_1 und den Spalten von D_2 gemeinsame quadratische Matrix r-ter Ordnung bezeichnen, entsprechend werde D_{21} definiert. Dann ist nach Satz A 4

$$\begin{vmatrix} |D_1| & |D_{12}| \\ |D_{21}| & |D_2| \end{vmatrix} = 0,$$

so dass D_{12} nicht verschwinden kann und also D_{12} ein A_{rr} ist; D_{12} können wir zwischen D_1 und D_2 einschieben, womit wir fertig sind.

91. *Erhaltung des definiten Charakters.* Jetzt betrachten wir die Vorzeichen der Elemente und Unterdeterminanten der Matrix A. Sind alle Elemente von A nicht negativ oder aber alle Elemente nicht positiv, so soll A definit heissen (wie in 15 für Vektoren).

Bedeutet x eine definite Zeile und ist A definit, so ist offenbar auch $xA = y$ eine definite Zeile. Wir können uns nun allgemein fragen, welche Matrizen A überhaupt diese Eigenschaft haben, jedes definite x in ein definites $y = xA$ überzuführen.

Nehmen wir speziell $x = e_i$ (an der i-ten Stelle eine Eins, sonst lauter Nullen), so wird y die i-te Zeile a_i von A sein. A muss mithin lauter definite Zeilen haben.

Setzen wir nun $x = e_i + \lambda e_k$, $\lambda > 0$, $i \neq k$, so ist $y = a_i + \lambda a_k$. Sollten in a_i und a_k Elemente mit verschiedenem Vorzeichen vorkommen, ohne dass a_i und a_k proportionale Zeilen sind, so wähle man λ zwischen zwei verschiedenen Verhältnissen der absoluten Beträge entsprechender Elemente von a_i und a_k. Dann sieht man leicht, dass y nicht definit ist. Da a_i und a_k ein beliebiges Paar von Zeilen der Matrix A ist, besteht A also, wenn es nicht definit ist, aus lauter proportionalen, definiten Zeilen und hat den Rang eins. In diesem Fall ist y, als lineare Kombination der Zeilen, ihnen ebenfalls proportional und daher definit, sogar unabhängig davon, ob x definit ist oder nicht. Wir fassen zusammen:

Satz B 2. Damit $y = xA$ bei beliebigem definitem x gleichfalls definit ist, ist notwendig und hinreichend, dass A entweder definit ist oder aus lauter proportionalen, definiten Zeilen besteht.

92. *Definition und Folgerungen.* Wir wollen nun eine Matrix A zeilendefinit nennen, wenn jedes $A^{(i)}$, $1 \leq i \leq r-1$, definit ist und $A^{(r)}$ aus lauter definiten Zeilen besteht [1]). Nach Satz A 4 sind diese Zeilen stets zueinander proportional. Die Eigenschaft, zeilendefinit zu sein, bleibt offenbar bei Multiplikation einer Zeile mit einem positiven Faktor erhalten. Es gilt aber allgemeiner:

Satz B 3. Das Produkt von zwei zeilendefiniten Matrizen ist selbst zeilendefinit.

Ist nämlich r der Rang dieses Produktes BA, dann haben auch B und A mindestens den Rang r. Für $i < r$ ist $(BA)^{(i)} = B^{(i)}A^{(i)}$ definit. Jede Zeile von $(BA)^{(r)} = B^{(r)}A^{(r)}$ entsteht aus einer Zeile b von $B^{(r)}$ durch Multiplikation mit $A^{(r)}$. b ist definit, $A^{(r)}$ ist entweder definit oder es besteht aus lauter proportionalen, definiten Zeilen, so dass $bA^{(r)}$ nach Satz B 2 auch definit ist.

Wir können nun für B speziell eine Matrix wählen, die aus der Einheitsmatrix dadurch entsteht, dass eine gewisse Spalte

---

[1]) Schönberg nennt A minorendefinit, wenn alle $A^{(i)}$ (auch $A^{(r)}$) definit sind. Er zeigt, dass eine minorendefinite Matrix variationsvermindernd ist, während das Umgekehrte nur für den Fall zu gelten braucht, dass A genau r Zeilen hat.

zweimal nebeneinander geschrieben wird, während die übrigen Spalten unverändert bleiben, denn alle Unterdeterminanten dieses B haben den Wert eins oder Null. Dann sehen wir:

Satz B 4. Eine zeilendefinite Matrix A bleibt auch nach Ersetzung von zwei aufeinanderfolgenden Zeilen durch ihre Summe zeilendefinit.

Schliesslich ist es trivial, dass auch jede Teilmatrix von A mit A zeilendefinit ist.

§ 16. Der Hauptsatz.

93. *Sonderfälle.* Nach diesen Vorbereitungen können wir uns endlich der Betrachtung der variationsvermindernden Matrizen, wie sie in 1 und 88 definiert sind, zuwenden.

Die zu betrachtende Matrix sei A, ihr Rang r. Es ist klar, dass auch jede Teilmatrix von A variationsvermindernd ist. Denn bei Weglassung von Spalten kann $y = xA$ keine Zeichenwechsel gewinnen, und Weglassung von Zeilen lässt sich bewirken, indem man die entsprechenden z-Koordinaten gleich Null setzt.— Wir untersuchen nun vorerst zwei Sonderfälle.

1. A hat r Zeilen und $r+1$ Spalten.— Dann genügen die Wertsysteme $y = xA$ einer linearen homogenen Relation, deren Koeffizientenreihe $\pm A^{(r)}$ ist, wo $\pm$, wie stets weiterhin, die abwechselnde Multiplikation mit $+1$ und -1 bezeichnen soll. Dabei ist diese Relation die einzige y auferlegte Bedingung, so dass jedes Zahlensystem, das dieser Relation genügt, sich in der Form $y = xA$ schreiben lässt.

Da x aus r Zahlen besteht und also höchstens $r-1$ Zeichenwechsel hat, gilt, da A variationsvermindernd ist, letzteres auch für y. Also muss $z = \pm y > 0$ durch die obige Relation ausgeschlossen sein. Mithin muss $z > 0$ mit $A^{(r)} \cdot z = 0$ unvereinbar sein. Hätte $A^{(r)}$ zwei Elemente von verschiedenem Vorzeichen, so könnte man dagegen die entsprechenden Elemente von z doch positiv wählen, wenn man dabei die übrigen Elemente von z sehr klein, aber positiv, bestimmt; also muss $A^{(r)}$ definit sein.

2. A hat den Rang r, r Zeilen und r Spalten.— Dann ist mit $y = xA$ auch $x = yA^{-1}$ oder $\pm x = (\pm y)\left(\frac{A^{(r-1)*}}{|A|}\right)'$; der Stern soll hier bedeuten, dass sowohl die Reihenfolge der Zeilen als auch die der Spalten umzukehren ist. Mit $\pm y > 0$ (d.h.,

wenn y genau $r-1$ Zeichenwechsel hat) ist, da A variationsvermindernd ist, auch $\pm x > 0$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann mit $\pm y \geq 0$ auch $\pm x \geq 0$. Wir können daher Satz B 2 anwenden, und sehen für $r > 1$, da $|A^{(r-1)}| \neq 0$ ist und $A^{(r-1)}$ also den Rang r hat, dass $A^{(r-1)}$ definit ist; für $r = 1$ ist das trivial.

94. *Hauptsatz, erster Teil.* Haben wir nun allgemein irgendeine variationsvermindernde Matrix A vom Range r, und betrachten wir die Elemente von $A^{(i)}$, $i < r$, so haben wir im vorigen Paragraphen ausführlich gesehen, dass sich je zwei von ihnen durch eine gewisse Kette verbinden lassen. In dieser Kette gehören je zwei aufeinanderfolgende Elemente einem $A_{i+1,\,i+1}$ an, das als Teilmatrix von A selbst variationsvermindernd ist, so dass, nach dem soeben Bewiesenen, die beiden A_{ii} und daher alle A_{ii} gleiches Vorzeichen haben. $A^{(i)}$, $i < r$ ist also definit.

Nehmen wir ferner zwei Elemente aus derselben Zeile von $A^{(r)}$, und bilden wir wieder die zugehörige Kette aus Elementen dieser Zeile, so kommen wir auf zwei $A^{(r)}$, die einer Teilmatrix von r Zeilen und $r+1$ Spalten angehören und also auch wieder dasselbe Vorzeichen haben müssen (s.o.). Die Zeilen von $A^{(r)}$ sind also definit, und wir haben bewiesen:

Satz B 5. Jede variationsvermindernde Matrix ist zeilendefinit.

95. *Ein Hilfssatz.* Um auch das Umgekehrte einzusehen, beweisen wir zunächst den Hilfssatz:

Satz B 6. Eine zeilendefinite Matrix A von r Spalten muss genau den Rang r haben, wenn es ein x mit $y = xA$ und $\pm y > 0$ gibt.

Für $r = 1$ ist das trivial, und wir können also Induktion bezüglich r benutzen. Sei A_- die Matrix, die entsteht, wenn man aus A die letzte Spalte weglässt. Dann ist auch $\pm xA_- > 0$ und also, nach Induktionsvoraussetzung, A_- vom Range $r-1$. A hat demnach den Rang r oder $r-1$. Wäre der Rang von A aber $r-1$, so gäbe es in A eine Teilmatrix B von $r-1$ Zeilen, aus denen sich die übrigen, und also auch y, linear zusammensetzten. Daher wäre die Determinante $\begin{vmatrix} B \\ y \end{vmatrix} = 0$, was, nach der letzten Zeile entwikkelt, einen Widerspruch ergibt, da die $(B^{(r-1)})$ eine definite, nicht identisch verschwindende Zahlenfolge bilden und $\pm y > 0$ ist.

96. *Hauptsatz, zweiter Teil.* Es sei nun A eine beliebige zeilendefinite Matrix, und vergleichen wir die Zahl der Zeichenwechsel von $y = xA$ mit der von x.

Zu diesem Zwecke lassen wir aus x und y alle Nullen sowie aus y jedes Element, das auf ein Element gleichen Vorzeichens folgt, weg, was auf die Ersetzung von A durch eine Teilmatrix hinausläuft. Sodann ersetzen wir in x aufeinanderfolgende Elemente gleichen Vorzeichens durch ihre (einmal geschriebene) Summe, was der Addition aufeinanderfolgender, mit geeigneten Faktoren multiplizierter Zeilen entspricht, wobei die Matrix nach Satz B 4 zeilendefinit bleibt. So erhalten wir ein $y^{(0)} = x^{(0)}A^{(0)}$ mit $\pm x^{(0)} > 0$, $\pm y^{(0)} > 0$. Jetzt wenden wir den Hilfssatz an und sehen, dass $A^{(0)}$ mindestens soviel Zeilen wie Spalten hat, so dass $x^{(0)}$ mindestens soviel Zeichenwechsel wie $y^{(0)}$ hat; diese Zahlen sind aber dieselben wie für x und y. Daher, und wegen Satz B 5, haben wir jetzt in vollem Umfange bewiesen:

Hauptsatz (Satz B 7). Eine Matrix ist dann und nur dann variationsvermindernd, wenn sie zeilendefinit ist.

Nunmehr erkennen wir auch den Grund dafür, dass das Produkt zweier zeilendefiniter Matrizen selbst eine solche ist: variationsvermindernd ist ja *eo ipso* eine transitive Eigenschaft.

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

§ 1. Einleitung

Ausgangspunkt — Zentrale Fragestellung — Gang der Untersuchung — Ergebnisse — Zeichen und Termini — Verzeichnis der Sätze und Formeln 1

§ 2. Zur Geschichte und Bibliographie

Fourier — Gordan und Minkowski — Farkas und andere — Die Amerikaner; Schlussbemerkungen — Verzeichnis der Arbeiten — Literatur zu §§ 15-16 — Weitere Literatur 5

KAPITEL I. ALLGEMEINES

§ 3. Einleitende Definitionen und Bemerkungen

Mengen — Punktmengen — Matrizen — Gleichungen — Auflösung durch Determinanten — Linearmengen 12

§ 4. Konvexe Mengen

Definitionen — Der Rand — Durchschnittsbildung — Strahlenbereiche — Ganzseitigkeit — Die Zahlengerade — Vorzeichenbereiche 15

KAPITEL II. DARSTELLUNG DER LÖSUNGEN

§ 5. Ungleichungen

Relationen — Systeme — Bemerkungen — Teilsysteme — Der Koeffizientenbereich einer Zeile — Der Koeffizientenbereich einer Matrix — Lösungsmatrizen 19

§ 6. Existenz von L

A^* — Beweis — Zweiter Fall — Die Reduktion — Allgemeines A 23

§ 7. Angabe aller L

L explizit — Beweis — Erster und zweiter Fall — Der dritte Fall — Die Reduktion 26

§ 8. Die Lösungsbasen

Vorbereitung — Herstellung — Zeilenzahl — Zusammenhang verschiedener Lösungsbasen — Spezielle V — Orthogonalisierung 30

§ 9. Festes V *Seite*

Kürzeste Darstellung — Untersuchung von C_1 — Untersuchung von C_2 — Positive Darstellungen — Zeilenzahl — Herstellung von D_1 — Ergänzende Bemerkungen 33

§ 10. Inhomogene Systeme

Die Homogenisierung — Die drei Bestandteile — Unrunde Mengen — Geometrische Bemerkungen — Echte Ungleichungen 39

KAPITEL III. LÖSBARKEITSKRITERIEN

§ 11. Kleinste unauflösbare Systeme

Definition — L und $\bar{L}$ — Die z-Ecke — L als Strahlenbereich — Z als lineares Gebilde — Echte Ungleichungen — Es ist $r = m-1$ 43

§ 12. Unauflösbarkeit

Das Kombinationsprinzip — Definite Abhängigkeit — Hauptkriterien — Korollar 47

§ 13. Der Transpositionssatz

Seine Herleitung — Zeilenweise Deutung — Spaltenweise Deutung im R_n — Spaltenweise Deutung im R_{n-1} — Existenz der Trennhyperebene — Existenz der Stützhyperebene — Vollständig signierte Matrizen 51

§ 14. Der Simplexsatz

Formulierung und erster Beweis — Zweiter Beweis — Weitere Deutung — Unabhängige Punkte — Einpunktige Stützhyperebenen — Reduktion unbeschränkter Mengen auf beschränkte — Schrittweise Auflösung — Anderer Beweis des Transpositionssatzes 56

KAPITEL IV. VARIATIONSVERMINDERNDE MATRIZEN

§ 15. Zeilendefinite Matrizen

Vorbemerkungen — A_i-Ketten — A_{ii}-Ketten — Erhaltung des definiten Charakters — Definition und Folgerungen 63

§ 16. Der Hauptsatz

Sonderfälle — Hauptsatz, erster Teil — Ein Hilfssatz — Hauptsatz, zweiter Teil 67

Curriculum vitae.

Ich, Theodor Samuel Motzkin, bin am 26.3.1908 in Berlin geboren, als Sohn des Schriftstellers Leo Motzkin und seiner Frau Polina, geb. Rosenblum. Die grundlegende mathematische Erziehung erhielt ich von meinem Vater.— Die Schule besuchte ich ein Jahr (1918/19) in Kopenhagen (Schneekloths Skole) und ein Jahr (1922/23) in Heidelberg (Oberrealschulabteilung des Holzbergschen Privatgymnasiums), wo ich die mathematische Schulung Professor Ed. Ullrichs empfing. Im Herbst 1923 trat ich in die Realgymnasialabteilung des Grunewaldgymnasiums in Berlin ein, das mich Februar 1924 unter Suspendierung vom mündlichen Examen mit dem Reifezeugnis entliess.

Von 1924 bis Februar 1927 studierte ich an der Universität Berlin, wo ich die Vorlesungen der Herren

Bieberbach, Löwner, Erh. Schmidt, I. Schur, Szegö (Mathematik), Friedländer, Marckwald, Rieffert, Sachs (Musikwissenschaft, Philosophie, Chemie)

besuchte bezw. an ihren Übungen teilnahm. Im Wintersem. 1927/28 und im Sommersem. 1928 studierte ich in Göttingen bei

Bernays, Grandjot, Herglotz, Hilbert, Landau, Lietzmann, Ostrowski, van der Waerden (Mathematik), Geiger, Gierke, Kötz, Mirbt, Misch, Oldenberg, Wedekind (Philosophie, Chemie, Versicherungswissenschaft).

Nachdem ich mich in Jerusalem niedergelassen hatte, nahm ich 1931 mein Universitätsstudium wieder auf. Ich studierte vier Semester (1931-1933) in Basel bei den Herren

A. L. Bernoulli, Matthies, E. Merian, Nef, Ostrowski und Spiess (Mathematik, Musikwissenschaft, theoretische Physik, physikalische Chemie und Literaturwissenschaft).

Allen meinen Lehrern spreche ich hier meinen Dank aus. Mit Dankbarkeit erwähne ich das wohlwollende Interesse, das mir Herr Professor Schur in Berlin in den ersten Jahren meines Studiums zuteil werden liess. Ganz besonders verpflichtet fühle ich mich Herrn Professor Ostrowski in Basel, der meine wissenschaftliche Arbeit in den letzten Jahren in entscheidendem Maasse gefördert hat, unter dessen Leitung meine Dissertation entstanden ist, und dem ich für seine Hilfe und für seinen Rat bei allen meinen Arbeiten auch an dieser Stelle herzlichst danken möchte.

Basel, Juli 1933.

CORRIGENDA

Seite	Zeile	lies
1	8 v. u.	§§ 5—14
1	7 " "	§§ 15
1	6 " "	16
18	5 v. o.	$a \langle \overline{A}$
24	1 " "	Koordinaten
24	4 " "	$\Sigma\, \xi_i e_i$
25	11 v. u.	$n-1$
28	16 v. o.	von $A^{(x)}$
28	18 " "	$\neq 0$
29	5 v. u.	konvexer Strahlenbereich